Casos Práticos

Caso 3.1

Considere as seguintes informações relativas a duas acções:

	Acção A	Acção B
Rendibilidade esperada	15%	10%
Desvio padrão da rentabilidade esperada	12%	8%
Valor de cotação	EUR10	EUR15

Coeficiente de correlação linear entre as rentabilidades esperadas das acções A e B = 0.5.

Pretende-se que:

a) Supondo que o investidor pretende aplicar EUR120,000 e obter um rendimento esperado de 10.5%, determine a composição da carteira a constituir bem como o desvio padrão da respectiva taxa de rentabilidade.

b) Analise a eficiência da carteira definida na alínea anterior.

c) Repita as alíneas (a) e (b), admitindo que o investidor pretende agora obter um rendimento esperado de 12%.

d) Sabendo que o investidor pode realizar aplicações e contrair empréstimos à taxa de juro sem risco de 6%:
   d.1) Mantém a composição estabelecida na alínea (c) para uma carteira eficiente a um nível de rentabilidade esperada de 12%?
   d.2) Caso contrário, determine a composição e o desvio padrão da taxa de rentabilidade para a nova carteira.

Solução

a)

a.1) Determinação da composição óptima da carteira.

A composição da carteira ("p"), apenas composta por acções A e B, terá de ser tal que a sua taxa de rentabilidade esperada corresponda a 10.5%, isto é, $E(r_p)$ = 10.5%.

Por outro lado, como a rentabilidade de uma carteira de títulos é dada pela média das rentabilidades de cada um dos títulos componentes, ponderada pelo peso relativo de cada activo no portfólio, então "x_A" (peso relativo das acções A na carteira) e "x_B" (peso relativo das acções B na carteira) deverão ser tais que:

$$\begin{cases} 10.5\% = 15\% x_A + 10\% x_B \\ x_A + x_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10.5\% = 15\% x_A + 10\%(1 - x_A) \\ x_B = 1 - x_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0.1 \\ x_B = 0.9 \end{cases}$$

Em síntese, o investidor deve aplicar 10% da sua riqueza (isto é, 0.1 x EUR120,000 = EUR12,000) nas acções A e os restantes 90% (ou seja, 0.9 x EUR120,000 = EUR108,000) nas acções B. Para o efeito, terá de adquirir 1,200 acções A (12,000 / 10) e 7,200 acções B (108,000 / 15).

a.2) Cálculo do desvio padrão da taxa de rentabilidade da carteira $(x_A ; x_B) \equiv (0.1 ; 0.9)$.

O desvio padrão da carteira $(x_A ; x_B)$ pode ser obtido do seguinte modo:[1]

$$\sigma_p = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_{A,B}},$$

onde $\sigma_{A,B} = COV(r_A, r_B)$.

Mas como, ao invés da covariância, apenas é conhecido o valor do coeficiente de correlação linear $(\rho_{A,B})$ e sabe-se que $\sigma_{A,B} = \sigma_A \cdot \sigma_B \cdot \rho_{A,B}$, então é preferível recorrer à seguinte expressão:

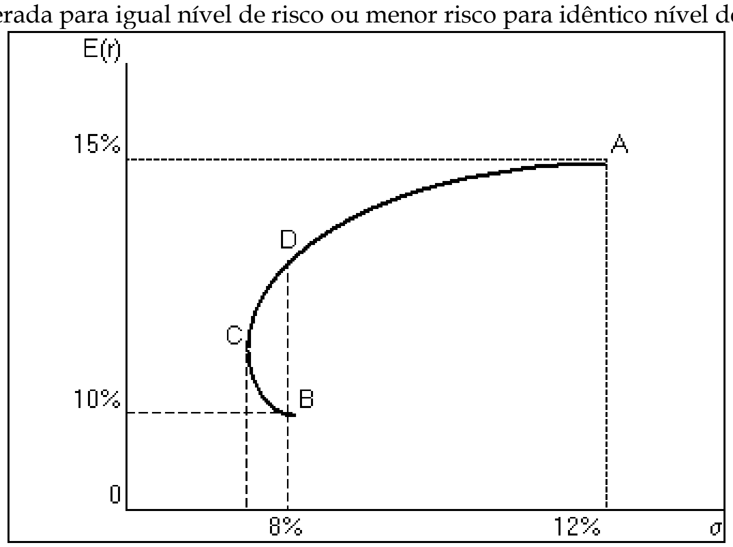
$$\sigma_p = \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

Deste modo,

$$\sigma_p = \sqrt{(0.1)^2(0.12)^2 + (0.9)^2(0.08)^2 + 2\times 0.1\times 0.9\times 0.12\times 0.08\times 0.5} = 7.869\%.$$

b)

Uma carteira de títulos diz-se *eficiente* quando não existe nenhum outro portfólio que ofereça maior rentabilidade esperada para igual nível de risco ou menor risco para idêntico nível de rentabilidade.[2]



[1]Com efeito, $\sigma_p^2 = VAR(r_p) = VAR(x_A r_A + x_B r_B) = x_A^2 VAR(r_A) + x_B^2 VAR(r_B) + 2x_A x_B COV(r_A, r_B)$

[2] Sendo o nível de risco da carteira medido pelo respectivo desvio padrão da taxa de rentabilidade.

Tratando-se de apenas duas acções, o *conjunto de possibilidades de investimento* (ou seja, o conjunto de carteiras que podem ser constituídas combinando, em diferentes proporções, os diversos títulos) é graficamente representado por uma hipérbole; no caso em análise, trata-se do arco BA ilustrado no gráfico anterior. Todavia, somente as carteiras situadas sobre o troco ascendente da parábola (arco CA) podem ser consideradas *carteiras eficientes*, visto que qualquer carteira pertencente à parcela descendente da parábola é superada em termos de rentabilidade (para igual nível de risco) por um outro portfólio situado sobre a *fronteira eficiente de Markowitz* (arco CA)[1].

Consequentemente, a análise da eficiência da carteira $(x_A ; x_B) \equiv (0.1 ; 0.9)$ consiste em verificar se tal carteira está ou não situada sobre o arco CA (arco compreendido entre a carteira de menor risco -C- e a carteira de maior rentabilidade -A). Para tal, ir-se-à deduzir a equação representativa da *fronteira eficiente de Markowitz*:

$$\begin{cases} E(r_p) = 15x_A + 10x_B \\ x_A + x_B = 1 \\ \sigma_p = \sqrt{(12)^2 \cdot x_A^2 + (8)^2 \cdot x_B^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot 12 \cdot 8 \cdot 0.5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E(r_p) = 15x_A + 10 \cdot (1 - x_A) \\ x_B = 1 - x_A \\ \sigma_p = \sqrt{144x_A^2 + 64 \cdot (1 - x_A)^2 + 96x_A \cdot (1 - x_A)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{E(r_p)}{5} - 2 \\ \sigma_p = \sqrt{112x_A^2 - 32x_A + 64} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \sqrt{112 \cdot \left(\frac{E(r_p)}{5} - 2\right)^2 - 32 \cdot \left(\frac{E(r_p)}{5} - 2\right) + 64} \Leftrightarrow \sigma_p = \sqrt{4.48E(r_p)^2 - 96E(r_p) + 576}$$

A equação anterior - $\sigma_p = \sqrt{4.48E(r_p)^2 - 96E(r_p) + 576}$ - representa[2] o *conjunto de possibilidades de investimento*, pois existindo apenas dois títulos a *portfolio frontier* identifica-se com o *feasible portfolio set*. Para obter a equação representativa da *fronteira eficiente de Markowitz* há que considerar a expressão anterior, mas somente a partir do ponto de desvio padrão mínimo:

---

[1] Por exemplo, $\begin{cases} E(r_D) > E(r_B) \\ \sigma_D = \sigma_B \end{cases}$.

[2] Trata-se da equação de uma parábola, no espaço média – variância, ou de uma hipérbole, no espaço média – desvio-padrão.

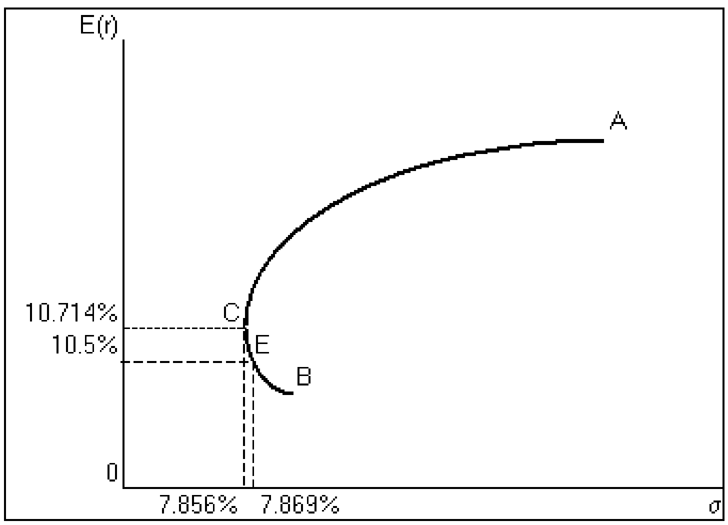
$$\underset{E(r_p)}{\operatorname{Min}} \sigma_p :^{1} \qquad \frac{d\sigma_p}{dE(r_p)} = 0 \Leftrightarrow \frac{8.96R_p - 96}{2\sqrt{4.48E(r_p)^2 - 96E(r_p) + 576}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8.96E(r_p) - 96 = 0 \ \wedge \ 2\sqrt{4.48E(r_p)^2 - 96E(r_p) + 576} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E(R_{mvp}) = 10.714\%^{2}$$

Fronteira eficiente de Markowitz $\equiv \sigma_p = \sqrt{4.48E(r_p)^2 - 96E(r_p) + 576}$,

para $E(r_p) \geq 10.714\%$



Concluindo, a carteira $(x_A;x_B) \equiv (0.1 ; 0.9)$ não é eficiente, dado que o seu rendimento esperado (10.5%) é inferior ao nível de rendimento associado à carteira de desvio padrão mínimo, pelo que a carteira em análise (ponto E do gráfico anterior) situa-se fora da *fronteira eficiente de Markowitz*.

---

[1] A condição de segunda ordem é verificada , pois: $\frac{d^2\sigma_p}{dE(r_p)^2} = \frac{1105.92}{4 \cdot \sqrt{\left(4.48E(r_p)^2 - 96E(r_p) + 576\right)^3}} \geq 0$.

[2] O nível mínimo de risco que pode ser obtido mediante a combinação das acções A e B é então de:

$$\sigma_p\left(E(r_p) = 10.714\%\right) = \sqrt{4.48 \cdot (10.714)^2 - 96 \cdot 10.714 + 576} \cong 7.856\% .$$

c)

c.1) Determinação da composição da carteira

$(x_A;x_B)$: $\begin{cases} 12 = 15x_A + 10x_B \\ x_A + x_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 15x_A + 10\cdot(1-x_A) \\ x_B = 1 - x_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0.4 \\ x_B = 0.6 \end{cases}$

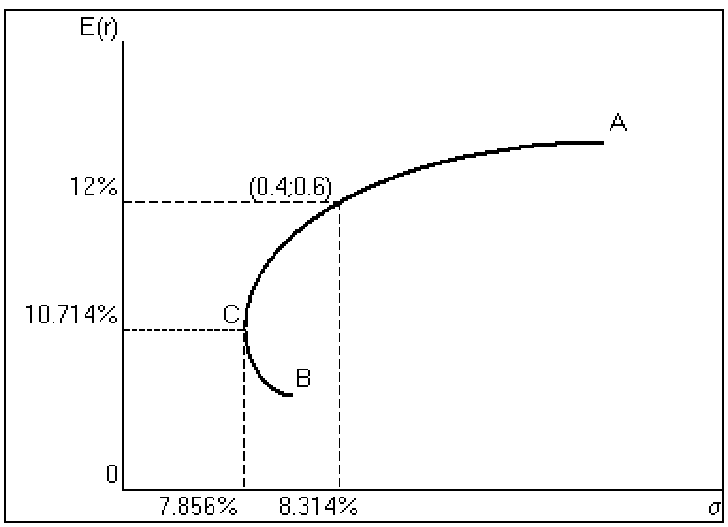
Para obter uma rentabilidade de 12%, o investidor deve aplicar 40% da sua riqueza nas acções A (adquirindo 0.4 x EUR120,000 / 10 = 4,800 títulos) e 60% nas acções B (adquirindo 4,800 títulos = 0.6 x EUR120,000 / 15).

c.2) Determinação do desvio padrão associado à carteira $(x_A;x_B) \equiv (0.4 ; 0.6)$

$$\sigma_p = \sqrt{(0.4)^2 \cdot (12)^2 + (0.6)^2 \cdot (8)^2 + 2\cdot 0.4\cdot 0.6\cdot 12\cdot 8\cdot 0.5} = 8.314\%$$

c.3) Análise da eficiência da carteira $(x_A;x_B) \equiv (0.4 ; 0.6)$

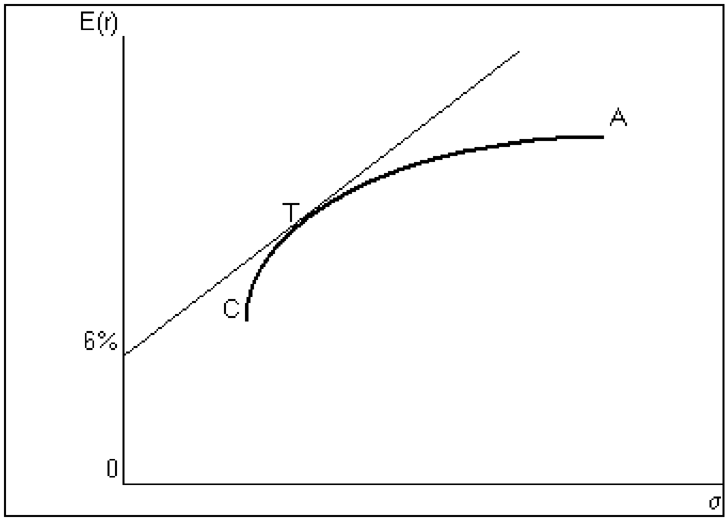
A carteira em análise é eficiente, ou seja, está situada sobre a *fronteira eficiente de Markowitz*, pois o seu nível de rendimento (12%) é superior ao rendimento associado ao portfólio de desvio padrão mínimo (10.714%).



d)

d.1) Existindo a possibilidade de efectuar aplicações financeiras ou financiamentos à taxa do activo sem risco (designada por "r_f"), então a *fronteira eficiente* (lugar geométrico das *carteiras eficientes*) passa a ser dada pela semi recta com origem no ponto $(\sigma_p, E(r_p)) \equiv (0\%, r_f = 6\%)$

e tangente à *fronteira eficiente de Markowitz*, ou seja, uma *carteira eficiente* será sempre uma combinação linear entre a *carteira de tangência* (designada por "T") e aplicações ou financiamentos à taxa do activo sem risco. Consequentemente, a *carteira de tangência* constitui o único portfólio apenas composto por acções que é eficiente, pelo que a carteira definida na alínea (c) somente será eficiente caso corresponda à *carteira de tangência*. Seguidamente ir-se-á proceder à determinação da carteira "T" aproveitando o facto de, no ponto "T", a inclinação da *fronteira eficiente de Markowitz* ser igual à inclinação da *nova fronteira eficiente*.



No ponto "T", a inclinação da *fronteira eficiente de Markowitz* é igual a:

$$\left(\frac{dE(r_p)}{d\sigma_p}\right)_{p\equiv T} = \left(\frac{1}{d\sigma_p / dE(r_p)}\right)_{p\equiv T} = \left(\frac{1}{\frac{8.96E(r_p)-96}{2\sqrt{4.48E(r_p)^2-96E(r_p)+576}}}\right)_{p\equiv T} =$$

$$= \frac{2\sqrt{4.48E(r_T)^2-96E(r_T)+576}}{8.96E(r_T)-96}$$

De igual modo, a inclinação, no ponto "T", da recta representativa da *nova fronteira eficiente* é dada por $\frac{E(r_T)-6}{\sigma_T-0}$.

Assim, como, no ponto "T", as duas inclinações são idênticas e, por outro lado, o desvio padrão dado pela recta é igual ao determinado pela curva representativa da *fronteira eficiente de Markowitz* (isto é, $\sigma_T = \sqrt{4.48E(r_T)^2-96E(r_T)+576}$), logo:

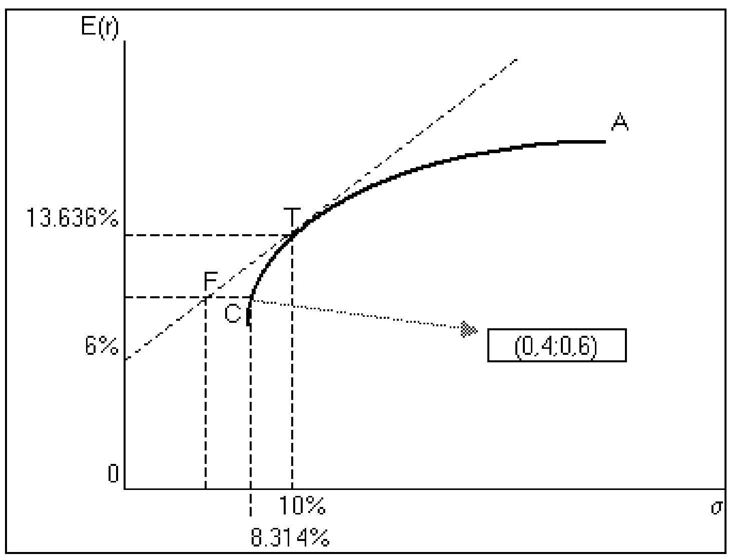
$$\frac{2\sqrt{4.48E(r_T)^2 - 96E(r_T) + 576}}{8.96E(r_T) - 96} = \frac{E(r_T) - 6}{\sqrt{4.48E(r_T)^2 - 96E(r_T) + 576}} \Leftrightarrow E(r_T) = 13.636\%$$

Portanto,

$$\sigma_T = \sqrt{4.48 \cdot (13.636)^2 - 96 \cdot 13.636 + 576} \cong 10\%$$

Concluindo, a carteira definida na alínea (c) - $(\sigma_p, E(r_p)) \equiv (8.314\%, 12\%)$-não é eficiente, na medida em que não coincide com a *carteira de tangência* - $(\sigma_p, E(r_p)) \equiv (10\%, 13.636\%)$.

d.2) Como $12\% < E(r_T)$, então a *carteira eficiente* para um nível de rendimento de 12% irá consistir numa combinação entre a *carteira de tangência* e uma aplicação[1] à taxa sem risco (ponto "F" do gráfico seguinte), proporcionando necessariamente um desvio padrão inferior a 8.314%.



Assim, designando por "x_T" a percentagem da riqueza do investidor aplicada na *carteira de tangência* e por "x_f" a percentagem investida no activo sem risco, vem:

carteira eficiente $\equiv (x_T, x_f)$: $\begin{cases} 12 = 13.636x_T + 6x_f \\ x_T + x_f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = 0.78575 \\ x_f = 0.21425 \end{cases}$

[1] Caso contrário (ou seja, se o nível de rendimento desejado fosse superior à rentabilidade esperada para a *carteira de tangência*), haveria que contrair um financiamento à taxa de juro sem risco para aplicar o montante obtido (juntamente com a riqueza do investidor) na *carteira de tangência*.

Daqui resulta que o investidor deve aplicar 78.575% da sua riqueza na *carteira de tangência* e os restantes 21.425% no activo sem risco.

Mas, como a *carteira de tangência* integra apenas acções A e B, proporcionando um rendimento de 13.636%, então

$$\begin{cases} 13.636\% = 15x_A + 10x_B \\ x_A + x_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0.7272 \\ x_B = 0.2728 \end{cases}$$

é composta em 72.72% por acções A e em 27.28% por acções B, pelo que

$$(x_T, x_f) \equiv (78.575\%, 21.425\%) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_A, x_B, x_f) \equiv (0.78575 \cdot 72.72\%; 0.78575 \cdot 27.28\%; 21.425\%) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_A, x_B, x_f) \equiv (57.140\%, 21.435\%, 21.425\%)$$

o investidor, para obter uma remuneração de 12% minimizando o risco, deve aplicar a sua riqueza do seguinte modo: 57.140% em acções A (0.5714xEUR120,000 / 10 ≅ 6,857 acções) , 21.435% em acções B (0.21435xEUR120,000 /15 ≅ 1,715 acções) e 21.425% (0.21425xEUR120,000 = EUR25,710) numa aplicação sem risco.

Constituindo, o investidor, a carteira definida anteriormente - $(x_T, x_f) \equiv (78.575\%, 21.425\%) \Leftrightarrow (x_A, x_B, x_f) \equiv (57.140\%, 21.435\%, 21.425\%)$-, ele irá incorrer num nível de risco de:

$$\sigma_p = \sqrt{x_T^2 \cdot \sigma_T^2 + x_f^2 \cdot \sigma_f^2 + 2 \cdot x_T \cdot x_f \cdot \sigma_T \cdot \sigma_f \cdot \rho_{T,f}} \Leftrightarrow$$ [1]

$$\Leftrightarrow \sigma_p = x_T \cdot \sigma_T \Leftrightarrow \sigma_p = 0.78575 \cdot 10\% = 7.858\%$$ [2] (< 8.314%)

[1] Pois, $\sigma_f = 0$.

[2] Em alternativa,

$$\sigma_p = \sqrt{x_A^2 \cdot \sigma_A^2 + x_B^2 \cdot \sigma_B^2 + x_f^2 \cdot \sigma_f^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_B \cdot \sigma_{A,B} + 2 \cdot x_A \cdot x_f \cdot \sigma_{A,f} + 2 \cdot x_B \cdot x_f \cdot \sigma_{B,f}} \Leftrightarrow$$

e como $\sigma_f^2 = \sigma_{A,f} = \sigma_{B,f} = 0$, então

$$\sigma_p = \sqrt{(0.5714)^2 \cdot (12)^2 + (0.21435)^2 \cdot (8)^2 + 2 \cdot 0.5714 \cdot 0.21435 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 0.5} = 7.858\%.$$

Caso 3.2

O Fundo de Investimento ESC pretende optimizar a decomposição da sua carteira de activos em três grandes áreas de negócios: obrigações, acções e imobiliário. O quadro seguinte resume as previsões efectuadas sobre a evolução dos três segmentos de mercado durante o próximo ano bem como a actual composição da carteira do Fundo ESC.

	Obrigações	Acções[1]	Imobiliário
Taxa de rentabilidade esperada	4.0%	10%	20%
Desvio-padrão da taxa de rentabilidade	3.0%	20%	15%
Parâmetro beta	-	0.8	-
Composição actual da carteira	50%	20%	30%

As correlações históricas entre as taxas de rentabilidade dos diversos mercados são resumidas no quadro seguinte:

	Obrigações	Acções	Imobiliário
Obrigações	1		
Acções	-0.4	1	
Imobiliário	0.6	0.0	1

Com base nos elementos anteriores, deduziu-se a seguinte equação para a *fronteira eficiente de Markowitz*:

$$\sigma_p^2 = 0.6722E(r_p)^2 - 0.0377E(r_p) + 0.001 \quad \wedge \quad E(r_p) \geq 2.80\% .$$

Pretende-se que:

a) Analise a eficiência da actual composição do Fundo ESC.

b) Calcule os níveis de rentabilidade esperada e de risco que o Fundo ESC deverá ter por objectivo, assumindo a seguinte função de utilidade: $U \equiv \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right]$.

c) Sabendo que os Bilhetes do Tesouro a um ano estão actualmente cotados a 96.15%, qual a taxa de rentabilidade esperada a 1 ano para o índice Dow Jones Eurostock 50?

Solução

a)

A actual composição é eficiente sse a sua rentabilidade esperada e desvio-padrão obedecerem à equação da *portfolio frontier* e estiverem "acima" da *minimum variance portfolio*.

$$E(r_p) = 4\% \times 0.5 + 10\% \times 0.2 + 20\% \times 0.3 \cong 10\%.$$

[1] As previsões para o mercado accionista baseiam-se no índice Dow Jones Eurostock 50.

$$\sigma_p^2 = (0.5\times 0.03)^2 + (0.2\times 0.2)^2 + (0.3\times 0.15)^2$$
$$+ 2\times 0.5\times 0.2\times 0.03\times 0.2\times (-0.4) + 2\times 0.5\times 0.3\times 0.03\times 0.15\times 0.6$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = 0.00418 \Rightarrow \sigma_p \cong 6.465\%.$$

Via equação da *portfolio frontier*:

$$\sigma_p^2 = 0.6722\times (0.1)^2 - 0.0377\times 0.1 + 0.001$$
$$= 0.003952$$

$$\Rightarrow \sigma_p \cong 6.286\% < 6.465\%.$$

A actual composição da carteira não é eficiente, uma vez que é possível, para igual taxa de rentabilidade esperada obter um menor nível de risco.

b)

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p^2\}}{MAX} \quad U \equiv \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right]$$

Sujeito a

$$0.6722E(r_p)^2 - 0.0377E(r_p) + 0.001 - \sigma_p^2 = 0$$

e

$$E(r_p) \geq E(r_{mvp})$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p^2,\lambda\}}{MAX} \quad L \equiv \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] + \lambda\left[0.6722E(r_p)^2 - 0.0377E(r_p) + 0.001 - \sigma_p^2\right]$$

Sujeito a

$$E(r_p) \geq 2.80\%$$

Condições de primeira ordem:

- $\dfrac{\partial L}{\partial \sigma_p^2} = 0 \Leftrightarrow -6\exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] + \lambda[-1] = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6\exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right]$

$$\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] + \lambda\left[2 \times 0.6722E(r_p) - 0.0377\right] = 0$$

- $$\Rightarrow \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] - 6\exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] \times \left[2 \times 0.6722E(r_p) - 0.0377\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 6 \times \left[2 \times 0.6722E(r_p) - 0.0377\right] = 0 \Leftrightarrow E(r_p) \cong 15.20\% > 2.8\%.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 0.6722E(r_p)^2 - 0.0377E(r_p) + 0.001 - \sigma_p^2 = 0$$

- $$\Rightarrow \sigma_p^2 = 0.6722 \times (0.152)^2 - 0.0377 \times 0.152 + 0.001 \cong 0.0108$$
$$\Rightarrow \sigma_p \cong 10.39\%.$$

c)

$$r_f = \frac{100\%}{96.15\%} - 1 \cong 4\%$$

$$E(r_M): \quad 10\% = 4\% + \left[E(r_M) - 4\%\right] \times 0.8$$

$$\Rightarrow E(r_M) = 11.5\%.$$

Caso 3.3

O Fundo de Investimento ESC pretende optimizar a decomposição da sua carteira de activos em quatro grandes áreas de negócios: obrigações, acções, imobiliário e liquidez (ou seja, depósitos bancários). O quadro seguinte resume as previsões efectuadas sobre a evolução dos quatro segmentos de mercado durante o próximo ano bem como a actual composição da carteira do Fundo ESC.

	Obrigações	Acções[1]	Imobiliário	Liquidez
Taxa de rentabilidade esperada	4.0%	8%	20%	3%
Desvio-padrão da taxa de rentabilidade	2.0%	25%	15%	0%
Composição actual da carteira	55%	15%	20%	10%

As correlações históricas entre as taxas de rentabilidade dos diversos mercados são resumidas no quadro seguinte:

[1] As previsões para o mercado accionista baseiam-se no índice Dow Jones Eurostock 50.

	Obrigações	Acções	Imobiliário
Obrigações	1		
Acções	-0.4	1	
Imobiliário	0.5	-0.1	1

Com base nos elementos relativos aos segmentos accionista, obrigacionista e imobiliário, deduziu-se a seguinte equação para a *portfolio frontier*:

$$\sigma_p^2 = 0.7430E(r_p)^2 - 0.0494E(r_p) + 0.0011.$$

Pretende-se que:

a) Calcule a taxa de rentabilidade esperada e o respectivo desvio-padrão para a carteira de variância mínima.

b) Analise a eficiência da actual composição do Fundo ESC, sabendo que a carteira de tangência possui uma rentabilidade esperada igual a 14.15% e um desvio-padrão igual a 9.47%.

c) Calcule a taxa de rentabilidade esperada e o respectivo desvio-padrão para a carteira óptima, assumindo a seguinte função de utilidade: $U \equiv \ln\left[E(r_p) - 4\sigma_p^2\right]$.

d) Sabendo que a taxa de rentabilidade esperada a 1 ano para o índice Dow Jones Eurostock 50 é igual a 7%, calcule o parâmetro beta da componente accionista do Fundo ESC.

Solução

a)

$$\underset{E(r_p)}{\text{Min}}\ \sigma_p^2 = 0.7430E(r_p)^2 - 0.0494E(r_p) + 0.0011$$

Condição de 1ª ordem:

$$\partial\sigma_p^2 \big/ \partial E(r_p) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 0.7430E(r_p) - 0.0494 = 0 \Leftrightarrow E(r_{mvp}) \cong 3.324\%.$$

$$\sigma_{mvp} = \sqrt{0.7430(0.03324)^2 - 0.0494 \times 0.03324 + 0.0011} \cong 1.670\%.$$

b)

Actual composição:

$$E(r_p) = 4\% \times 0.55 + 8\% \times 0.15 + 20\% \times 0.2 + 3\% \times 0.1 = 7.7\%.$$

$$\sigma_p^2 = (0.55\times0.02)^2 + (0.15\times0.25)^2 + (0.2\times0.15)^2$$
$$+ 2\times0.55\times0.15\times0.02\times0.25\times(-0.4) + 2\times0.55\times0.2\times0.02\times0.15\times0.5$$
$$+ 2\times0.15\times0.2\times0.25\times0.15\times(-0.1)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = 0.00220225 \Rightarrow \sigma_p \cong 4.693\%.$$

Equação da fronteira eficiente global:

$$E(r_p) = 3\% + \frac{14.15\% - 3\%}{9.47\%}\times\sigma_p.$$

A actual composição só é eficiente sse a anterior equação for verificada:

$$E(r_p) = 3\% + \frac{14.15\% - 3\%}{9.47\%}\times 4.693\% = 8.526\% \neq 7.7\%.$$

Visto a anterior proposição ser falsa, conclui-se que a actual composição é ineficiente. De facto, para igual nível de risco (4.693%) é possível obter um maior nível de rentabilidade esperada (8.526% > 7.7%).

c)

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p\}}{MAX} \quad U \equiv \ln\left[E(r_p) - 4\sigma_p^2\right]$$

Sujeito a

$$E(r_p) = 3\% + \frac{14.15\% - 3\%}{9.47\%}\times\sigma_p$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p,\lambda\}}{MAX} \quad L \equiv \ln\left[E(r_p) - 4\sigma_p^2\right] + \lambda\left[0.03 + 1.1774\sigma_p - E(r_p)\right]$$

Condições de primeira ordem:

- $\dfrac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{E(r_p) - 4\sigma_p^2}$

- $$\frac{\partial L}{\partial \sigma_p} = 0 \Leftrightarrow \frac{-8\sigma_p}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} + 1.1774\lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{-8\sigma_p}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} + \frac{1.1774}{E(r_p) - 4\sigma_p^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sigma_p = \frac{1.1774}{8} \cong 14.72\%.$$

- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 0.03 + 1.1774\sigma_p - E(r_p) = 0$$
$$\Rightarrow E(r_p) = 3\% + 1.1774 \times 14.72\% \cong 20.33\%$$

d)

$$\beta: \quad 8\% = 3\% + [7\% - 3\%] \times \beta$$

$$\Rightarrow \beta \cong 1.25.$$

Caso 3.4

Da análise da carteira de acções MPN (denominada em EUR) apuraram-se os seguintes indicadores:
.Rendibilidade esperada para o próximo ano = 18%; e
.Variância da taxa de rendibilidade = 244.

Por outro lado, prevê-se que o índice Dow Jones Eurostock 50[1] registe um acréscimo anual de 23% e a análise da variância do índice indica um valor de 310.

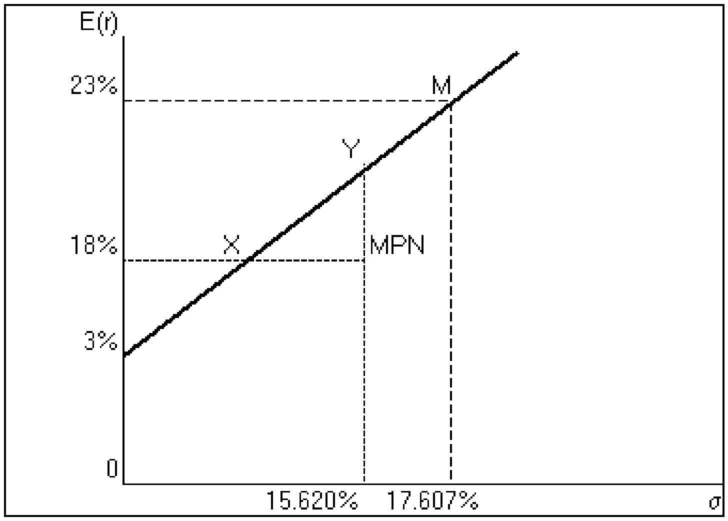
Sabendo que os Bilhetes do Tesouro a 1 ano estão, neste momento, a ser emitidos a 3%, pretende-se que analise a eficiência da carteira MPN.

Solução

A carteira de acções MPN - $(\sigma_p, E(r_p)) \equiv (\sqrt{244} \cong 15.620\%, 18\%)$- não é certamente eficiente, pois a única carteira apenas composta por acções (isto é, que não engloba aplicações ou financiamentos à taxa de juro sem risco) que se encontra sobre a *Capital Market Line*[2] (CML) é a *carteira cópia do mercado* - $(\sigma_p, E(r_p)) \equiv (\sqrt{310} \cong 17.607\%, 23\%)$.

[1] Este índice engloba 50 das maiores acções transaccionadas na zona euro.
[2] Lugar geométrico das *carteiras eficientes*, as quais, à luz dos pressupostos inerentes ao *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), consistem em combinações entre a *carteira cópia de mercado* e o activo sem risco.

Com efeito, é possível identificar um portfólio baseado na combinação da *carteira cópia do mercado* (ponto "M" do gráfico seguinte) e do activo sem risco que, face à carteira MPN, forneça um menor desvio padrão para igual rentabilidade (ponto "X"): [1]



$$\begin{cases} 18 = 23x_M + 3x_f \\ x_M + x_f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow^{2} \begin{cases} x_M = 0.75 \\ x_f = 0.25 \end{cases}$$

Assim, sendo 75% da riqueza investida na *carteira cópia do mercado* e os restantes 25% aplicados na aquisição de Bilhetes do Tesouro, obter-se-à uma remuneração de 18% e um desvio padrão de apenas:

$$\sigma_p = 075 \times 17.607\% \cong 13.205\% \qquad (< 15.620\%)$$

Caso 3.5

Admita que dispõe das seguintes acções para investir:

	Acção A	Acção B	Acção C
Beta	1.2	1.4	0.8
Desvio Padrão	12%	14%	8%

Coeficientes de correlação: A/B = 0.6; A/C = 0.4; B/C = 0.5.

[1] Ou uma maior rentabilidade para idêntico desvio padrão (ponto "Y").

[2] "x_M" representa a percentagem investida na *carteira cópia do mercado* e "x_f" designa a percentagem aplicada ou financiada à taxa de juro sem risco.

A rendibilidade esperada para o mercado accionista é de 12%, enquanto que os títulos sem risco apresentam uma rendibilidade de 5%.

Pretende-se que:

a) Suponha que pretende aplicar EUR100,000 nas acções A, B, C (tendo como restrição que o valor a aplicar em A + B não poderá ser inferior a 70% da carteira) e obter um rendimento de 13%. Determine a composição da carteira, bem como o respectivo nível de risco.

b) Analise a eficiência da carteira anterior. Se esta não for eficiente determine a composição da carteira eficiente para o mesmo nível de rendibilidade.

Solução

a)

Rentabilidade esperada de A = 5% + 1.2 (12% - 5%) = 13.4%

Rentabilidade esperada de B = 5% + 1.4 (12% - 5%) = 14.8%

Rentabilidade esperada de C = 5% + 0.8 (12% - 5%) = 10.6%

$$\begin{cases} 13.4\% W_a + 14.8\% W_b + 10.6\% W_c = 13\% \\ W_a + W_b + W_c = 1 \\ W_a + W_b = 0.7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_a = 38.57\% \\ W_b = 31.43\% \\ W_c = 30.00\% \end{cases}$$

O risco da carteira é dado pela seguinte expressão:

$$\sigma^2_c = (38.57\% * 12\%)^2 + (31.43\% * 14\%)^2 + (30\% * 8\%)^2 + (2 * 38.57\% * 12\% * 31.43\% * 14\% * 0.6) + (2 * 38.57\% * 12\% * 30\% * 8\% * 0.4) + (2 * 31.43\% * 14\% * 30\% * 8\% * 0.5)$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2_c = 9{,}51\%$$

b)

Considerando que o investidor pode efectuar aplicações e financiamentos à taxa de juro sem risco teremos como carteira eficiente, e à luz do CAPM, uma combinação de carteira cópia de mercado com activo sem risco, a qual, para uma rentabilidade idêntica, apresentará um nível de risco inferior.

$$\begin{cases} 12\%\ Wm + 5\%\ Wf = 13\% \\ Wm + Wf = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Wm = 1.1429 \\ Wf = -0.1429 \end{cases}$$

Para obter a mesma rentabilidade o investidor endivida-se em 14,290 Euros à taxa de risco nulo e aplica 114,290 Euros na carteira cópia do mercado.

Caso 3.6

Considere que determinada carteira é composta da seguinte forma:

Bilhetes do Tesouro:	400,000 Euros
Carteira ABC	600,000 Euros

Á luz do CAPM prevê-se uma rendibilidade para a globalidade daquelas aplicações de 25%, sendo a taxa sem risco (r_f) de 5% e o beta da carteira ABC de 1.5.

a) Qual é a rendibilidade prevista para o mercado accionista?

b) A introdução da acção Q, no montante de 200,000 Euros na carteira ABC (que passará assim de 600,000 para 800,000 Euros), irá incrementar a rendibilidade da globalidade das aplicações para 27%. Determine o beta da acção Q.

Solução

a) O investimento é composto em 40% por BT's e 60% pela carteira ABC, e possui uma rendibilidade total de 25%.

$(0.4 * 5\%) + (0.6 * E(r_{ABC})) = 25\% \Rightarrow E(r_{ABC}) = 38.33\%$,
sabendo que o beta da carteira ABC é de 1.5, temos então:

$38.33\% = 5\% + 1.5 * (E(r_M) - 5\%) \Rightarrow E(r_M) = 27.22\%$.

b) O valor total da carteira passará de 1 000 000 Euros para 1 200 000 Euros. Assim,

$$^{200}\!/_{1200} \times E\left(r_Q\right) + {}^{1000}\!/_{1200} \times \quad 25\,\% = 27\,\%$$

$E(r_Q) = 37\%$, então,

$37\% = 5\% + \beta_Q * (27.22\% - 5\%) \Rightarrow \quad \beta_Q = 1.44$

Caso 3.7

Considere as seguintes informações:

	Acção A	Acção B	Carteira cópia do mercado	Activo sem risco
Rendibilidade esperada	19.45%	20.5%	15%	3%
Rendibilidade esperada de equilíbrio	?	?	15%	3%
Coeficiente de correlação linear com a carteira cópia do mercado	0.9	0.8	1	0
Desvio padrão da taxa de rentabilidade esperada	12%	15%	8%	0%

Pretende-se que:

a) Desenhe a *Security Market Line*.

b) Calcule os parâmetros *beta* das duas acções.

c) Posicione as duas acções na *Security Market Line*.

d) Calcule os parâmetros *alfa* (de Jensen) das duas acções.

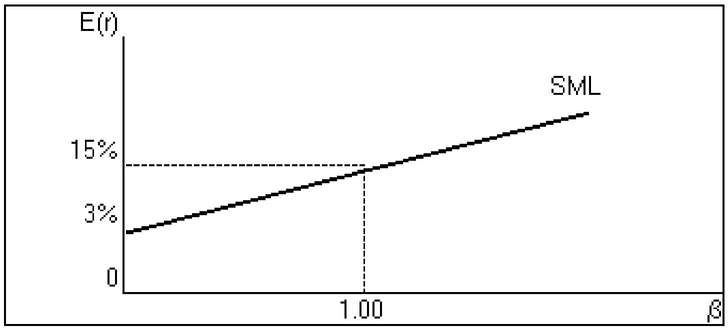
e) Formule a decisão de investimento a tomar face a cada uma das duas acções.

f) Calcule o índice Treynor das duas acções.

g) Calcule o índice Sharpe das duas acções.

Solução

a) Como para representar uma recta basta conhecer dois pontos e, por outro lado, sabe-se que os parâmetros *beta* associados à carteira cópia do mercado (β_M) e ao activo sem risco (β_f) são iguais à unidade e a zero, respectivamente, logo:



b)

b.1) Acção A

$$\beta_A = \frac{\sigma_{A,M}}{\sigma_M^2} \Rightarrow \beta_A = \frac{\sigma_{A,M}}{64}$$

sendo,

β_A ≡ parâmetro *beta* da acção A;
$\sigma_{A,M}$ ≡ covariância entre a rendibilidade esperada da acção A e da carteira cópia do mercado; e
σ_M^2 ≡ variância da taxa de rendibilidade do mercado.

Por outro lado,

$$\sigma_{A,M} = \rho_{A,M} \cdot \sigma_A \cdot \sigma_M \Rightarrow \sigma_{A,M} = 0.9 \cdot 12 \cdot 8 \Leftrightarrow \sigma_{A,M} = 86.4$$

sendo,

$\rho_{A,M}$ ≡ coeficiente de correlação linear entre as taxas de rendibilidade da acção A e do mercado;
σ_A ≡ desvio padrão da taxa de rendibilidade d a acção A; e
σ_M ≡ desvio padrão da taxa de rendibilidade do mercado.

Então,

$$\beta_A = \frac{86.4}{64} = 1.35$$

b.2) Acção B

$$\beta_B = \frac{\rho_{B,M} \cdot \sigma_B \cdot \sigma_M}{\sigma_M^2} \Rightarrow \beta_B = \frac{0.8 \cdot 15}{8} = 1.5$$

sendo,

$\beta_B \equiv$ parâmetro *beta* da acção B;

$\rho_{B,M} \equiv$ coeficiente de correlação linear entre as taxas de rendibilidade da acção B e do mercado;

$\sigma_B \equiv$ desvio padrão da taxa de rendibilidade da acção B; e

$\sigma_M \equiv$ desvio padrão da taxa de rendibilidade do mercado.

c) A *Security Market Line* relaciona a rentabilidade esperada de equilíbrio com o parâmetro *beta* (ou seja, com o *risco de mercado*; único risco relevante de um título, quando inserido numa carteira completamente diversificada) de um determinado activo.

Assim, uma vez determinados, na alínea anterior, os parâmetros *beta* associados às acções A e B, basta agora calcular as suas rendibilidades de equilíbrio mediante a utilização da fórmula

$$E^{SML}(r_i) = r_f + (E(r_M) - r_f) \cdot \beta_i$$

sendo,

$E^{SML}(r_i) \equiv$ rendibilidade esperada de equilíbrio para o título "i";

$r_f \equiv$ taxa de juro do activo sem risco;

$E(r_M) \equiv$ rendibilidade esperada para a carteira cópia do mercado; e

$\beta_i \equiv$ parâmetro *beta* do título "i",

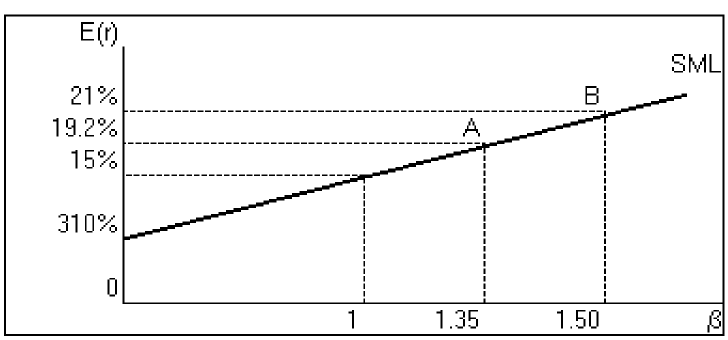
e considerando $E(r_M) = 15\%$ e $r_f = 3\%$:

-Rendibilidade de equilibrio esperada para o título A $\equiv E^{SML}(r_A)$:

$$E^{SML}(r_A) = 3 + (15 - 3) \cdot 1.35 = 19.20\%$$

-Rendibilidade de equilibrio esperada para o título B $\equiv R_B$:

$$E^{SML}(r_B) = 3 + (15 - 3) \cdot 1.5 = 21\%$$



d) Como

$$\alpha_i = E(r_i) - E^{SML}(r_i)$$

sendo,

$\alpha_i \equiv$ parâmetro *alfa* associado ao título "i";
$E(r_i) \equiv$ rendibilidade esperada para o título "i"; e
$E^{SML}(r_i) \equiv$ rendibilidade esperada de equilíbrio para o título "i",

então:

-parâmetro *alfa* associado à acção A $\equiv \alpha_A$:

$$\alpha_A = 19.45\% - 19.20\% = 0.25\%$$

-parâmetro *alfa* associado à acção B $\equiv \alpha_B$:

$$\alpha_B = 20.5\% - 21\% = -0.5\%$$

e)

e.1) Acção A: $\alpha_A > 0 \Rightarrow$ Comprar (desde que a acção A seja inserida numa carteira completamente diversificada).

e.2) Acção B: $\alpha_B < 0 \Rightarrow$ Vender.

f)

$$IT_A = \frac{E(r_A) - r_f}{\beta_A} = \frac{19.45\% - 3\%}{1.35} \cong 0.122.$$

$$IT_B = \frac{E(r_B) - r_f}{\beta_B} = \frac{20.5\% - 3\%}{1.5} \cong 0.117.$$

A acção A remunera melhor o respectivo nível de risco sistemático.

g)

$$IS_A = \frac{E(r_A) - r_f}{\sigma_A} = \frac{19.45\% - 3\%}{12\%} \cong 1.1371.$$

$$IS_B = \frac{E(r_B) - r_f}{\sigma_B} = \frac{19.45\% - 3\%}{15\%} \cong 1.097.$$

A acção A remunera melhor seu nível de risco total.

Caso 3.8

Considere a seguinte carteira X constituída por três acções (A,B,C):

	Peso Relativo	Desvio Padrão de rentabilidade
A	20%	10%
B	30%	15%
C	50%	8%

Covariâncias	A	B	C
A	0.0100	0.0090	0.0032
B		0.0225	0.0096
C			0.0064

A rentabilidade esperada para o mercado accionista é de 15%, com um desvio padrão de 7%. A rentabilidade do activo sem risco é de 5%.

Pretende-se que:

a) Determine o risco (desvio padrão da rentabilidade) da carteira.

b) Defina uma carteira Y (composição e rentabilidade esperada) situada na Capital Market Line, cujo nível de risco seja idêntico ao da carteira X

Solução

a)

$\sigma^2_X = (W^2_A\, \sigma^2_A) + (W^2_B\, \sigma^2_B) + (W^2_C\, \sigma^2_C) + (2\, W_A\, W_B\, \sigma_{AB}) + (2\, W_A\, W_c\, \sigma_{AC}) + (2W_B\, W_C\, \sigma_{BC})$

$= (0.2^2 \times 0.01) + (0.3^2 \times 0.0225) + (0.5^2 \times 0.0064) + (2 \times 0.2 \times 0.3 \times 0.009)$
$+ (2 \times 0.2 \times 0.5 \times 0.0032) + (2 \times 0.3 \times 0.5 \times 0.0096)$

$\Leftrightarrow \sigma^2_X = 0.008625$

$\Rightarrow \sigma_X = 9.287\%$

b)

$\sigma_Y = W_M\, \sigma_M \quad \Leftrightarrow \quad 0.09287 = W_M \times 0.07 \quad \Leftrightarrow \quad W_M = 1.3267$

$W_M + W_f = 1 \Leftrightarrow W_F = - 0.3267$

$E (R_Y) = 1.3267 \times 15\% - 0.3267 \times 5\%$

$E (R_Y) = 18.267\%$

Caso 3.9

Considere as seguintes informações:

	Rentabilidade Esperada	Desvio Padrão da Rentabilidade	Coef. correlação com o mercado
Acção A		7%	0.9
Acção B		14%	0.8
Carteira Mercado	16%	12%	
Activo Risco Nulo	5%		

O coeficiente de correlação linear entre as rendibilidades de A e B é de 0.75. Admita que pode fazer aplicações e financiamentos à taxa do activo sem risco.

Pretende-se que:

a) Determine a composição de uma carteira que inclua apenas as acções A e B, de modo a que a sua rentabilidade esperada seja de 13%.

b) Determine o risco total e o risco específico da carteira calculada na alínea anterior.

c) A carteira é totalmente diversificada? Justifique.

d) Admita que tem EUR10,000 para investir. Qual a melhor forma de aplicar este valor de modo a obter uma rentabilidade esperada de 18%?

Solução

a) $W_A \times E(r_A) + W_B \times E(r_B) = 13\%$

Relativamente à acção A temos:

$$\beta_A = \frac{\sigma_A \; \sigma_M \; \rho_{AM}}{\sigma_M^2} \Rightarrow \qquad \beta_A = \frac{0.07 \;\; x \;\; 0.12 \;\; x \;\; 0.9}{0.12^2} \qquad \Leftrightarrow \beta_A = 0.525$$

$\Rightarrow E(r_A) = 5\% + 0.525\ (16\% - 5\%) = 10.775\%$

Relativamente à acção B temos:

$$\beta_B = \frac{0.14 \text{ x } 0.12 \text{ x } 0.8}{0.12^2} \qquad \Leftrightarrow \beta_B = 0.9(3)$$

$\Rightarrow E(r_B) = 5\% + 0.9(3)\ (16\% - 5\%) = 15.2(6)\%$

Para o cálculo dos pesos relativos de cada uma das acções (W_A, W_B) temos:

$$\begin{cases} 10.775\ W_A + 15.26\ W_B = 13 \\ W_A + W_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_A = 0.505 \\ W_B = 0.495 \end{cases}$$

b) Risco Total σ_P :

$\sigma^2_P = (w_A\ \sigma_A)^2 + (w_B\ \sigma_B)^2 + 2\ W_A\ W_B\ \sigma_A\ \sigma_B\ \rho_{AB}$

$\sigma^2_P = (0.505 \text{ x } 0.07)2 + (o.495 \text{ x } 0.14)2 + 2x0.505x0.495x0.07x0.14x0.75$

$\sigma_P = 9.862\%$

Risco Especifico σ_{eP} : $\quad \sigma^2_P = (\ \beta_p\ \sigma_M\ )^2 + \sigma^2_{eP}$

$\beta_p = W_A\ \beta_A + W_B\ \beta_B = 0.505 \text{ x } 0.525 + 0.495 \text{ x } 0.9(3) \cong 0.727$

$\sigma^2_{eP} = \sigma^2_P - (\beta_p\ \sigma_M)^2 \qquad \Rightarrow \sigma_{eP} = 4.6\%$

c) Ao possuir risco especifico, não pode ser considerada totalmente diversificada.

d) A forma mais eficiente de efectuar uma aplicação, corresponde a investir numa composição de activos sem risco e carteira cópia de mercado.

$(W_m\ , W_f\ ) = ?\quad , E(r_p) = 18\%$

$16\%\ W_m + 5\%\ W_f = 18\%$ $\Leftrightarrow$ $W_m = 1.1818$

$W_m + W_f = 11$ $W_f = -0.1818$

Desta forma o investidor deve obter um financiamento de EUR1,818 à taxa do activo sem risco, e aplicar na carteira cópia de mercado EUR11,818.

Caso 3.10

A acção A irá ser trocada pela acção D, com um β de 0.8 na carteira T e na qual ambas têm um peso de 20%. Com esta permuta ir-se-á reduzir a rendibilidade de equilíbrio da carteira T de 19% para 18%.

a) Considerando que a rendibilidade prevista para o mercado é de 15% e que a taxa sem risco é de 7%, determine a rendibilidade de equilíbrio da acção A.

b) Se o desvio padrão de rendibilidade do mercado for de 20% e o desvio padrão de rendibilidade residual do titulo A de 3.5%, identifique a rendibilidade de uma carteira exclusivamente constituída por uma carteira cópia de mercado e o activo sem risco, que tem o mesmo risco da acção A.

Solução

a) $E(r_M) = 15\%$; $r_f = 7\%$; $\beta_D = 0.8$.

$$E(r_D) = 7\% + 0.8 * (15\%-7\%) \Leftrightarrow E(r_D) = 13.4\%$$

Conhecendo a rentabilidade da acção D, é possível determinar a rentabilidade global dos restantes 80%.

$0.2 \times 13.4\% + 0.8 \times R_{(restantes)} = 18\%$

$R_{(restantes)} = 19.15\%$

Desta forma será possível determinar a rendibilidade da acção A

$0.2 \times E(r_A) + 0.8 \times 19.15\% = 19\%$

$E(r_A) = 18.4\% \Leftrightarrow \beta_A = 1.425$

b)

$\sigma_M = 20\%$; $\sigma_{\varepsilon_A} = 3.5\%$; $\beta_A = 1.425$

Risco Total de A : $\sigma_A^2 = \beta_A^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_A}^2$

$\sigma_A^2 = 1.425^2 \times 0.2^2 + 0.035^2$

$\sigma_A = 28{,}714\%$

$\sigma^2_{Carteira} = W^2m \times \sigma^2_m + W^2_f \times \sigma^2_f + 2\ W_m \times W_f \times \sigma_{m,f}$

$\sigma_{Carteira} = Wm \times \sigma_m \Leftrightarrow 28.714\% = W_m \times 20\%$

$W_m + W_f = 1$

$W_m = 1.4357$; $W_f = -0.4357$

$E(r_{Carteira}) = 1.4357 \times 15\% - 0.4357 \times 7\% = 18.486\%$

Caso 3.11

No quadro seguinte apresenta-se a evolução das cotações diárias da acção Portugal Telecom (corrigidas de dividendos, direitos e *stock splits*) e do índice PSI20, para o período compreendido entre 17/Sept/2001 e 16/Nov/2001. Incluem-se ainda as taxas de rendibilidade registadas pelos Bilhetes do Tesouro (BT's) a 1 ano (taxas efectivas anuais)[1].

[1] Aproximadas via mercado monetário.

DATE	PT	PSI20	BTs
17-Sep-01	6.59	6,492.39	4.226%
18-Sep-01	6.7	6,644.08	3.808%
19-Sep-01	7.1	6,763.40	3.754%
20-Sep-01	7.37	6,661.45	3.758%
21-Sep-01	7.7	6,771.50	3.750%
24-Sep-01	7.81	6,957.14	3.749%
25-Sep-01	8.1	7,128.12	3.739%
26-Sep-01	8.04	7,220.84	3.735%
27-Sep-01	7.82	7,255.50	3.728%
28-Sep-01	7.98	7,324.91	3.727%
1-Oct-01	7.98	7,316.27	3.727%
2-Oct-01	7.85	7,260.85	3.722%
3-Oct-01	7.74	7,231.88	3.710%
4-Oct-01	7.75	7,340.62	3.692%
8-Oct-01	7.55	7,261.65	3.669%
9-Oct-01	7.8	7,349.81	3.688%
10-Oct-01	8.37	7,525.33	3.789%
11-Oct-01	8.23	7,542.80	3.742%
12-Oct-01	8.12	7,528.88	3.783%
15-Oct-01	8.12	7,454.34	3.776%
16-Oct-01	8.15	7,572.63	3.769%
17-Oct-01	8.48	7,698.30	3.821%
18-Oct-01	8.48	7,708.92	3.782%
19-Oct-01	8.2	7,614.29	3.761%
22-Oct-01	8.45	7,790.08	3.708%
23-Oct-01	8.95	7,931.32	3.698%
24-Oct-01	9.07	7,967.36	3.684%
25-Oct-01	8.78	7,856.61	3.651%
26-Oct-01	8.77	7,812.51	3.709%
29-Oct-01	8.86	7,774.80	3.701%
30-Oct-01	8.61	7,668.33	3.671%
31-Oct-01	8.8	7,768.01	3.642%
2-Nov-01	8.9	7,791.25	3.616%
5-Nov-01	9.14	7,902.89	3.613%
6-Nov-01	9.1	7,953.21	3.621%
7-Nov-01	9.3	8,022.30	3.542%
8-Nov-01	9.47	8,055.15	3.438%
9-Nov-01	9.18	7,979.71	3.423%
12-Nov-01	9.3	7,996.53	3.419%
13-Nov-01	9.42	8,081.44	3.422%
14-Nov-01	9.45	8,093.70	3.367%
15-Nov-01	9	7,989.26	3.357%
16-Nov-01	9.05	7,974.13	3.356%

Admitindo, para o próximo ano:

.uma rendibilidade média esperada para o mercado accionista de 15%;
.uma taxa de juro esperada ara os BT's a 1 ano de 3%; e
.um desvio padrão da rendibilidade do mercado de 25%,

a) Estime os parâmetros alfa e beta das acções PT, bem como o desvio padrão da respectiva rendibilidade residual.

b) Calcule a rendibilidade de equilíbrio e a rendibilidade esperada para as acções PT, assumindo a estabilidade dos parâmetros alfa e beta.

c) Calcule o desvio padrão anual da rendibilidade das acções PT.

Solução

a)

A estimação dos parâmetros em questão pode ser feita mediante a aplicação do seguinte *single index model*:

$$r_{PT} - r_f = \alpha_{PT} + (r_M - r_f) \times \beta_{PT} + \varepsilon_{PT} \text{, sendo}$$

r_{PT} ≡ taxa de rentabilidade gerada pela acção PT;

r_f ≡ taxa de juro sem risco;

r_M ≡ taxa de rentabilidade gerada pelo índice de mercado;

β_{PT} ≡ parâmetro beta da acção PT;

α_{PT} ≡ parâmetro alfa da acção PT;

ε_{PT} ≡ rendibilidade residual da acção PT, isto é, componente da taxa de rentabilidade gerada pela acção PT especifica à própria empresa, ou seja, não atribuível à evolução do mercado.

A equação anterior pode ser estimada via modelo de regressão linear clássico (método dos mínimos quadrados), assumindo que o termo residual ε_{PT} possui média zero e variância constante. Para o efeito, há que calcular os valores assumidos pelas variáveis dependente ($r_{PT} - r_f$) e independente ($r_M - r_f$) da anterior regressão (duas últimas colunas da tabela de rentabilidades históricas). A taxa de juro sem risco (r_f) corresponde à taxa efectiva diária equivalente à taxa de juro dos BTs (considerando um ano de 250 dias de negociação). Aplicando o método dos mínimos quadrados (menu /Tools/Data Analysis/Regression do MS Excel):

Regression Statistics	
Multiple R	0.70483092
R Square	0.496786625
Adjusted R Square	0.484206291
Standard Error	0.019593061
Observations	42

ANOVA

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	0.015159409	0.015159409	39.48914318	1.88461E-07
Residual	40	0.015355521	0.000383888		
Total	41	0.03051493			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*
Intercept	0.000173149	0.003257597	0.053152422	0.95787504	-0.006410698	0.006756996
X Variable 1	1.576762233	0.250915421	6.284038763	1.88461E-07	1.069643454	2.083881012

Tabela de rentabilidades históricas

DATE	r_{PT}	r_M	r_f	$r_{PT} - r_f$	$r_M - r_f$
17-Sep-01					
18-Sep-01	1.669%	2.336%	0.015%	1.654%	2.321%
19-Sep-01	5.970%	1.796%	0.015%	5.955%	1.781%
20-Sep-01	3.803%	-1.507%	0.015%	3.788%	-1.522%
21-Sep-01	4.478%	1.652%	0.015%	4.463%	1.637%
24-Sep-01	1.429%	2.741%	0.015%	1.414%	2.727%
25-Sep-01	3.713%	2.458%	0.015%	3.699%	2.443%
26-Sep-01	-0.741%	1.301%	0.015%	-0.755%	1.286%
27-Sep-01	-2.736%	0.480%	0.015%	-2.751%	0.465%
28-Sep-01	2.046%	0.957%	0.015%	2.031%	0.942%
1-Oct-01	0.000%	-0.118%	0.015%	-0.015%	-0.133%
2-Oct-01	-1.629%	-0.757%	0.015%	-1.644%	-0.772%
3-Oct-01	-1.401%	-0.399%	0.015%	-1.416%	-0.414%
4-Oct-01	0.129%	1.504%	0.015%	0.115%	1.489%
8-Oct-01	-2.581%	-1.076%	0.014%	-2.595%	-1.090%
9-Oct-01	3.311%	1.214%	0.014%	3.297%	1.200%
10-Oct-01	7.308%	2.388%	0.015%	7.293%	2.373%
11-Oct-01	-1.673%	0.232%	0.015%	-1.687%	0.217%
12-Oct-01	-1.337%	-0.185%	0.015%	-1.351%	-0.199%
15-Oct-01	0.000%	-0.990%	0.015%	-0.015%	-1.005%
16-Oct-01	0.369%	1.587%	0.015%	0.355%	1.572%
17-Oct-01	4.049%	1.660%	0.015%	4.034%	1.645%
18-Oct-01	0.000%	0.138%	0.015%	-0.015%	0.123%
19-Oct-01	-3.302%	-1.228%	0.015%	-3.317%	-1.242%
22-Oct-01	3.049%	2.309%	0.015%	3.034%	2.294%
23-Oct-01	5.917%	1.813%	0.015%	5.903%	1.799%
24-Oct-01	1.341%	0.454%	0.014%	1.326%	0.440%
25-Oct-01	-3.197%	-1.390%	0.014%	-3.212%	-1.404%
26-Oct-01	-0.114%	-0.561%	0.015%	-0.128%	-0.576%
29-Oct-01	1.026%	-0.483%	0.015%	1.012%	-0.497%
30-Oct-01	-2.822%	-1.369%	0.014%	-2.836%	-1.384%
31-Oct-01	2.207%	1.300%	0.014%	2.192%	1.286%
2-Nov-01	1.136%	0.299%	0.014%	1.122%	0.285%
5-Nov-01	2.697%	1.433%	0.014%	2.682%	1.419%
6-Nov-01	-0.438%	0.637%	0.014%	-0.452%	0.623%
7-Nov-01	2.198%	0.869%	0.014%	2.184%	0.855%
8-Nov-01	1.828%	0.409%	0.014%	1.814%	0.396%
9-Nov-01	-3.062%	-0.937%	0.013%	-3.076%	-0.950%
12-Nov-01	1.307%	0.211%	0.013%	1.294%	0.197%
13-Nov-01	1.290%	1.062%	0.013%	1.277%	1.048%
14-Nov-01	0.318%	0.152%	0.013%	0.305%	0.138%
15-Nov-01	-4.762%	-1.290%	0.013%	-4.775%	-1.304%
16-Nov-01	0.556%	-0.189%	0.013%	0.542%	-0.203%
σ_M		1.205%			
$\sigma_{PT,M}$	0.000229				

Em síntese:

$.\beta = 1.5768;$

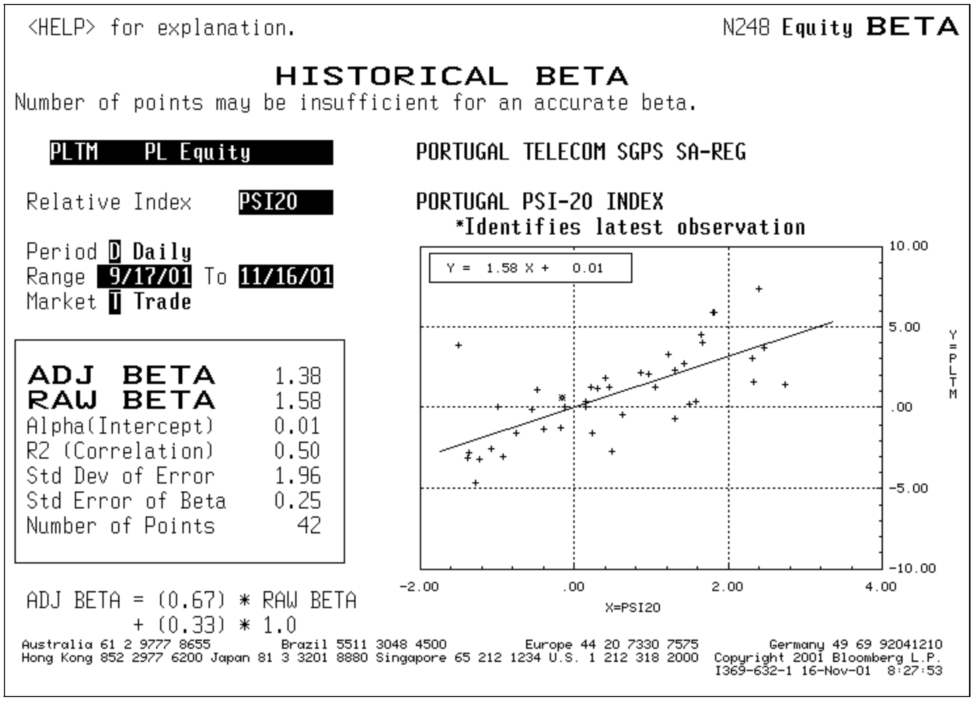
$.\alpha = 0.0001731 \rightarrow 0.017\%;$ e

$.\sigma_{\varepsilon} = 0.01959 \rightarrow 1.959\%.$

Em alternativa, o parâmetro beta poderia também ter sido estimado via:

$$\beta_{PT} = \frac{\sigma_{PT,M}}{\sigma_M^2} = \frac{0.000229}{(1.205\%)^2} \cong 1.5768.$$

O quadro seguinte resume os cálculos efectuados pela Bloomberg:



b)

b.1) Rendibilidade de equilíbrio das acções PT

Considerando a fórmula da *Security Market Line*,

$$E^{SML}(r_{PT}) = 3\% + (15\% - 3\%) \times 1.5768 \cong 21.92\%$$

b.2) Rendibilidade esperada para a acção PT

Como

$$\alpha_i = E(r_i) - E^{SML}(r_i)$$

sendo,

$\alpha_i \equiv$ parâmetro *alfa* associado ao título "i";

$E(r_i) \equiv$ rendibilidade esperada para o título "i"; e

$E^{SML}(r_i) \equiv$ rendibilidade de equilíbrio do título "i",

logo:

0.017% x 250[1] = $E(r_i)$ - 21.92% $\Leftrightarrow$ $E(r_i)$ = 26.17%

[1] O parâmetro alfa foi estimado com dados diários.

c) Atendendo a que:

$.\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2$

sendo,

$\sigma_i^2 \equiv$ variância da rendibilidade do título "i";

$\beta_i \equiv$ parâmetro *beta* associado ao título "i";

$\sigma_M^2 \equiv$ variância da rendibilidade do mercado; e

$\sigma_{\varepsilon_i}^2 \equiv$ variância da rendibilidade residual do título "i";

.β = 1.5768;

. σ_M = 25%; e

. $\sigma_{\varepsilon_{PT}} \equiv$ desvio padrão anual da rendibilidade residual das acções PT =

$$= 1.959\% \times \sqrt{250} = 30.975\%,$$

então:

$$\sigma_{PTI} = \sqrt{(1.5768)^2 \cdot (25\%)^2 + (30.975\%)^2} \cong 50.134\%.$$