Casos Práticos

Caso 2.1

Hoje (19/06/01; 3ª feira) foram estimadas as seguintes taxas de juro sem risco para o EUR:

Prazos	0.4 anos	0.896 anos	1 ano	2.4 anos	3 anos	4 anos
Taxas	4.80%	4.965%	5.00%	5.25%	5.60%	6%

Nota: taxas efectivas anuais (base de calendário: actual/actual).

Pretende-se que:

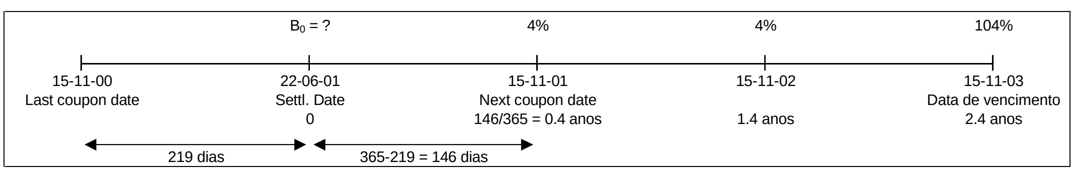
a) Formule uma decisão de compra ou de venda para a OT 4%[12] 15/11/2003, sabendo que o número de dias de juros vencidos é igual a 219 dias e que a obrigação está actualmente cotada a 97.40%-97.50%.

b) Admita comprar hoje a obrigação descrita na alínea a), com o intuito de a vender no dia 15/11/2002 (*settlement date*). Estime a taxa de rentabilidade efectiva anual associada a tal operação assumindo que as taxas de juro irão evoluir de acordo com as actuais expectativas do mercado.

Solução

a)

Settlement date = 19/06/01 + 3 dias de calendário = 22/06/01.



Utilizando a equação (2.5),

$$B_0 = \frac{4\%}{[1+r(0,0.4)]^{0.4}} + \frac{4\%}{[1+r(0,1.4)]^{1.4}} + \frac{104\%}{[1+r(0,2.4)]^{2.4}}$$

$$\Leftrightarrow B_0 = \frac{4\%}{[1+4.8\%]^{0.4}} + \frac{4\%}{[1+r(0,1.4)]^{1.4}} + \frac{104\%}{[1+5.25\%]^{2.4}}$$

A taxa *spot* a 1.4 anos pode ser obtida via interpolação linear:

$$r(0,1.4) \approx 5\% + (5.25\% - 5\%) \times \frac{1.4-1}{2.4-1} \cong 5.071\%.$$

[12] Obrigação do Tesouro português a taxa fixa, com cupão anual e reembolso *bullet*.

Então:

$$B_0 = \frac{4\%}{[1+4.8\%]^{0.4}} + \frac{4\%}{[1+5.071\%]^{1.4}} + \frac{104\%}{[1+5.25\%]^{2.4}} \cong 99.64\%.$$

Via equação (2.1),

$$AI = 4\% \times \frac{219}{365} = 2.4\%.$$

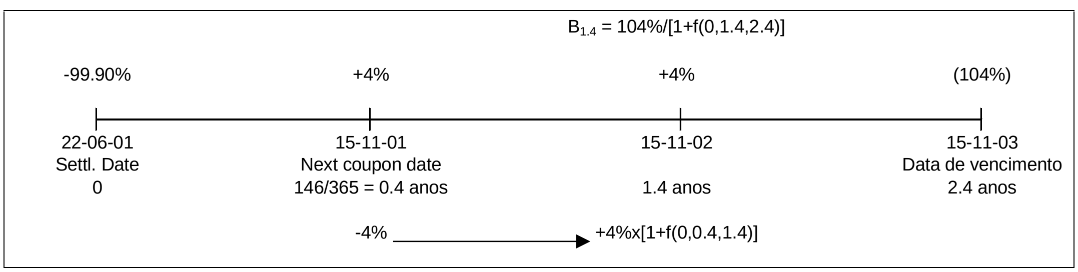
Decisão:

$$VT_0^{bid} = 97.40\% + 2.4\% = 99.80\% > B_0 \Rightarrow \text{ Vender;}$$

$$VT_0^{ask} = 97.50\% + 2.4\% = 99.90\% > B_0 \Rightarrow \text{ Não comprar.}$$

b)

Assumir que as futuras taxas *spot* corresponderão às actuais taxas *forward* significa definir os seguintes *cash flows* para a operação:



Cálculo das taxas *forward* via equação (2.3):

$$(1+5.071\%)^{1.4} = (1+4.8\%)^{0.4} \times [1+f(0,0.4,1.4)] \Rightarrow f(0,0.4,1.4) \cong 5.18\%;$$

$$(1+5.25\%)^{2.4} = (1+5.071\%)^{1.4} \times [1+f(0,1.4,2.4)] \Rightarrow f(0,1.4,2.4) \cong 5.50\%.$$

Portanto, com base na equação (2.8):

$$99.90\% \times (1+TRR_{1.4})^{1.4} = 4\% \times (1+5.18\%) + 4\% + \frac{104\%}{1+5.5\%}$$

$$\Leftrightarrow TRR_{1.4} \cong 4.876\%.$$

Caso 2.2

Considere as seguintes obrigações de dívida pública de idêntico valor nominal (50 euros) e com reembolso ao par na maturidade:

	A	**B**
Taxa cupão (anual)	3.75%	5.00%
Maturidade (anos)	5	5
Preço	49 euros / 98.00%	?

Determine:

a) Determine a *yield to maturity* da obrigação A.

b) Admitindo que a curva de taxas de juro é horizontal, determine o preço máximo que está disposto a pagar pela obrigação B.

c) Se o preço da obrigação B for de 52 euros / 104.00%, que decisão tomaria?

d) Calcule a taxa de rendimento realizado das obrigações A e B, considerando que a curva de taxas de juro irá sofrer os seguintes choques aditivos, imediatamente após a aquisição das obrigações:
   i) -1 pontos percentuais
   ii) +1 pontos percentuais

e) Se tivesse fundos para aplicar numa destas obrigações, qual seria a sua decisão de investimento?

Solução

a)

Para calcularmos a *yield to maturity* (YTM) precisamos de identificar quais os *cash flows* que a obrigação A vai gerar:

Cupão anual = 3.75% x 50 = 1.875 (1º ao 5º ano)
Amortização = 50 (5º ano)

A expressão para cálculo da YTM será a seguinte:

$$49 = \frac{1.875}{(1+y)} + \frac{1.875}{(1+y)^2} + \frac{1.875}{(1+y)^3} + \frac{1.875}{(1+y)^4} + \frac{1.875+50}{(1+y)^5}$$

$$\Rightarrow y = \text{YTM} = 4.20\%$$

ou em alternativa,

$$98\% = \frac{3.75\%}{(1+y)} + \frac{3.75\%}{(1+y)^2} + \frac{3.75\%}{(1+y)^3} + \frac{3.75\%}{(1+y)^4} + \frac{100\% + 3.75\%}{(1+y)^5}$$

$$\Rightarrow y = YTM = 4.20\%$$

b)

A obrigação B tem risco semelhante à obrigação A, pois ambas tem o mesmo emitente – o Estado.

Assim, para calcularmos o valor de B vamos utilizar como taxa de actualização (r) a taxa de rendimento (YTM) da obrigação A, pois esta será a taxa de remuneração mínima que o investidor exigirá num contexto de curva de taxa de juro horizontal (YTM = r).

Assim, o valor de equilíbrio da obrigação B é dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{5.0\%}{1.042} + \frac{5.0\%}{1.042^2} + \frac{5.0\%}{1.042^3} + \frac{5.0\%}{1.042^4} + \frac{100\% + 5.0\%}{1.042^5} \\ &= 103.5334\%. \end{aligned}$$

A obrigação A está a desconto (preço inferior ao valor nominal) porque a taxa do cupão é inferior à taxa de rendimento de uma obrigação com risco semelhante.

c)

Como o preço de mercado da obrigação B é maior do que o valor de equilíbrio que calculámos anteriormente, então a decisão será de vender a obrigação

d)

A YTM admite que os *cash flows* gerados pela obrigação são reinvestidos a essa mesma taxa. Assim, a rendibilidade alcançada pelo investidor só será igual à YTM se conseguir reinvestir os *cash flows* à taxa de 4.20%.

A taxa de rendimento realizado (TRR) procura resolver este problema introduzindo no seu cálculo a taxa de reinvestimento dos *cash flows*, que de qualquer forma é desconhecida à partida.

As obrigações A e B apresentam igual YTM, admitindo que B estará cotada pelo valor de equilíbrio, ou seja, as obrigações serão igualmente atractivas para o investidor segundo o critério da YTM. No entanto, esta situação de indiferença só se verifica se a taxa de reinvestimento (TR) esperada for de 4.2%.

Sendo a taxa de reinvestimento esperada diferente de 4.2% (a YTM) teremos que utilizar uma medida diferente: a taxa de rendimento realizado. Vamos calcular a TRR para os dois cenários propostos:

i) TR = 4.2% -1% = 3.2%

$$\text{Valor Cap.}_A = 50 + 1.875 \text{ x } s_{5\,|\,0.032} = 59.9945 \qquad TRR = \sqrt[5]{\frac{59.9945}{49}} - 1 = 4.13\%$$

$$\text{Valor Cap.}_B = 50 + 2.5 \text{ x } s_{5\,|\,0.032} = 63.3260 \qquad TRR = \sqrt[5]{\frac{63.3260}{51.7667}} - 1 = 4.11\%$$

Para uma taxa de reinvestimento esperada pelos investidores de 3.2% (inferior à YTM) a obrigação A é mais atractiva do que a obrigação B. Sendo a taxa de reinvestimento mais baixa é preferível um desconto no capital (A está abaixo do par) e um cupão mais baixo do que uma obrigação a prémio e cupão mais alto, como a B. O equilibrio será atingido quando a TRR de A e B forem idênticas o que resultará do movimento de mercado que se irá gerar (compra de A e venda de B).

ii) TR = 4.2% + 1% = 5.2%

$$\text{Valor Acumulado}_A = 50 + 1.875 \text{ x } s_{5\,|\,0.052} = 60.4020 \qquad TRR = \sqrt[5]{\frac{60.4020}{49}} - 1 = 4.27\%$$

$$\text{Valor Acumulado}_B = 50 + 2.5 \text{ x } s_{5\,|\,0.052} = 63.8694 \qquad TRR = \sqrt[5]{\frac{63.8694}{51.7667}} - 1 = 4.29\%$$

A obrigação B torna-se mais atractiva devido ao efeito de reinvestimento do cupão a taxas mais altas, pois esta obrigação tem uma taxa de cupão mais alta.

d)

A escolha entre A e B depende do cenário que o investidor assume relativamente à taxa de reinvestimento dos cupões (TR), assim:

Se TR > YTM => B
Se TR < YTM => A

Concluindo, podemos estabelecer uma relação entre TR, YTM e TRR:

$$\text{Se} \begin{cases} TR > YTM \\ TR = YTM \\ TR < YTM \end{cases} \qquad \text{Então} \begin{cases} TR > TRR > YTM \\ TR = TRR = YTM \\ TR < TRR < YTM \end{cases}$$

Caso 2.3

Hoje (11/09/01; 3ª feira) foram estimadas as seguintes taxas de juro sem risco para o EUR:

Prazos	1 ano	2 anos	3 anos	4 anos
Taxas	4.50%	5.25%	6.00%	6.50%

Nota: taxas efectivas anuais (base de calendário: ACT/ACT).

Pretende-se que:

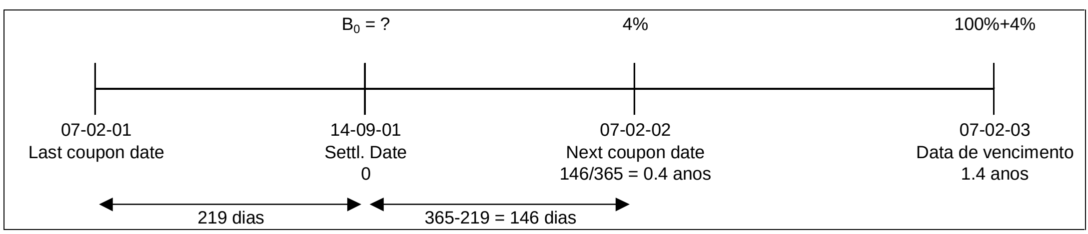
a) Avalie a OT 4% 07/02/2003, sabendo que o cupão tem uma periodicidade anual (ACT/ACT) e que o número de dias de juros vencidos é igual a 219 dias. Para o efeito considere que a OT 6% 07/02/2002, também com cupão anual (ACT/ACT), está cotada a 100.75% (média *bid—ask*).

b) Sabendo que a *yield-to-maturity* da OT 4% 07/02/2003 é actualmente igual a 4.91%(*bid*)/4.89%(*offer*), formule uma decisão de compra ou não compra.

Solução

a)

Settlement date = 11/09/01 + 3 dias de calendário = 14/09/01.



Utilizando a equação (2.5),

$$B_0 = \frac{4\%}{[1+r(0,0.4)]^{0.4}} + \frac{104\%}{[1+r(0,1.4)]^{1.4}}$$

A taxa *spot* a 0.4 anos pode ser obtida via *bootstrapping*:

$$100.75\% + 6\% \times \frac{219}{365} = \frac{106\%}{[1+r(0,0.4)]^{0.4}} \Rightarrow r(0,0.4) = \left(\frac{106\%}{100.75\% + 6\% \times \frac{219}{365}} \right)^{1/0.4} - 1 \cong 4\%.$$

A taxa *spot* a 1.4 anos pode ser obtida via interpolação linear:

$$r(0,1.4) \approx 4.5\% + (5.25\% - 4.5\%) \times \frac{1.4-1}{2-1} \cong 4.8\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{4\%}{[1+4\%]^{0.4}} + \frac{104\%}{[1+4.8\%]^{1.4}} \cong 101.33\%.$$

b)

Considerando a *yield offer*, e com base na equação (2.7):

$$VT_0^{ask} = \frac{4\%}{(1+4.89\%)^{0.4}} + \frac{104\%}{(1+4.89\%)^{1.4}} \cong 101.20\%.$$

Decisão:

$$VT_0^{ask} < B_0 \Rightarrow \text{Comprar.}$$

Caso 2.4

Hoje (09/07/01; 2ª feira) foram observados os seguintes valores de cotação (médias *bid-offer*) para obrigações do Tesouro:

Maturidade	Taxa de cupão	Periodicidade do cupão	Valor de cotação
3 meses	0%	-	98.91%
1 ano	4%	anual	99.28%
2 anos	5%	anual	99.11%

Pretende-se que:

a) Estime as taxas de juro *spot* sem risco a 0.25, 1 e 2 anos.

b) Formule uma decisão de compra ou de venda para a OT 6% 23/09/2002, sabendo que o cupão tem uma periodicidade anual (ACT/ACT), existe um prémio de reembolso igual a 5% do par, o número de dias de juros vencidos é igual a 292 dias e que a obrigação está actualmente cotada a 105.80%-105.90%.

Solução

a)

Via *bootstrapping*:

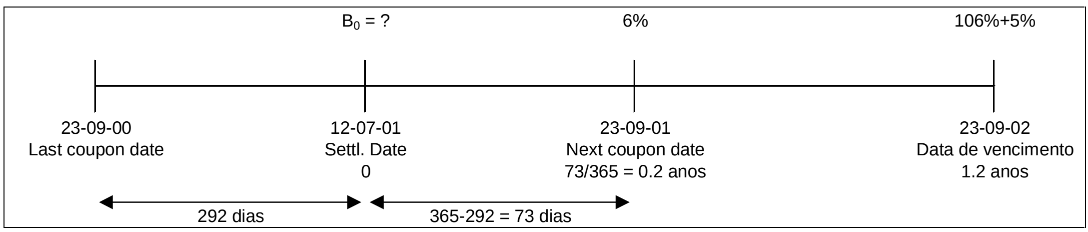
$$98.91\% = \frac{100\%}{[1+r(0,0.25)]^{0.25}} \Rightarrow r(0,0.25) \cong 4.48\%.$$

$$99.28\% = \frac{104\%}{[1+r(0,1)]^{1}} \Rightarrow r(0,1) \cong 4.75\%.$$

$$99.11\% = \frac{5\%}{1+4.75\%} + \frac{105\%}{[1+r(0,2)]^{2}} \Rightarrow r(0,2) \cong 5.50\%.$$

b)

Settlement date = 09 / 07 / 01 + 3 dias de calendário = 12 / 07 / 01.



Utilizando a equação (2.5),

$$B_0 = \frac{6\%}{[1+r(0,0.2)]^{0.2}} + \frac{111\%}{[1+r(0,1.2)]^{1.2}}$$

A taxa *spot* a 0.2 anos pode ser obtida via extrapolação linear:

$$r(0,0.2) \approx 4.48\% + (4.75\% - 4.48\%) \times \frac{0.2-0.25}{1-0.25} \cong 4.462\%.$$

A taxa *spot* a 1.2 anos pode ser obtida via interpolação linear:

$$r(0,1.2) \approx 4.75\% + (5.5\% - 4.75\%) \times \frac{1.2-1}{2-1} \cong 4.90\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{6\%}{[1+4.462\%]^{0.2}} + \frac{111\%}{[1+4.9\%]^{1.2}} \cong 110.76\%.$$

Via equação (2.1),

$$AI = 6\% \times \frac{292}{365} = 4.8\%.$$

Decisão:

$VT_0^{bid} = 105.80\% + 4.80\% = 110.60\% < B_0 \Rightarrow$ Não vender;

$VT_0^{ask} = 105.90\% + 4.80\% = 110.70\% < B_0 \Rightarrow$ Comprar**.**

Caso 2.5

A empresa MOTA & COMPANHIA tem em estudo a realização de um empréstimo obrigaccionista, com uma vida de 4 anos, sendo o capital reembolsado em 50% no final do 3º ano e 50% no final do 4º ano. O valor nominal de cada obrigação será de 10,000 euros e pretende-se que os juros sejam liquidados anualmente.

Tendo em vista a definição de uma taxa de juro aceitável pelo mercado, analisaram-se diversas obrigações cotadas em bolsa, tendo-se identificado as da empresa ENGIL como aquelas que melhor referência poderiam constituir para a emissão em causa (considere uma curva de taxas de juro horizontal). As suas características são as seguintes:

Valor Nominal: 10,000 euros
Taxa do cupão: 6% (pago semestralmente)
Reembolso: integralmente dentro de 2 anos
Cotação actual: 98.80%
Próximo vencimento de juros: dentro de seis meses

Pretende-se que:

a) Qual a taxa do cupão a que devem ser emitidas as obrigações da empresa MOTA & COMPANHIA se forem emitidas e reembolsadas ao par?

b) Admitindo agora que a empresa MOTA & COMPANHIA pretendia emitir com uma taxa do cupão de 6%, qual teria que ser o valor de emissão das obrigações? E se a MOTA & COMPANHIA quisesse emitir ao par qual seria a sua sugestão?

Solução

a)

Em primeiro lugar, temos que determinar a taxa de rendimento de uma obrigação de risco semelhante (empresa ENGIL), que irá ser utilizada como taxa de actualização para a obrigação da MOTA & COMPANHIA (admitindo que a curva de taxas de juro é horizontal).

Cupão = 10,000 x 0.06 / 2 = 300

$$9{,}880 = \frac{300}{(1+y)} + \frac{300}{(1+y)^2} + \frac{300}{(1+y)^3} + \frac{10{,}300}{(1+y)^4}$$

$$\Rightarrow y = YTM_{semestral} = 3.325\% \quad \Leftrightarrow \quad YTM_{anual} = (1+3.325\%)^2 \cong 6.76\%$$

Coexistindo obrigações com cupão anual e semestral no mercado temos que utilizar uma taxa comparável, existindo duas possibilidades: transformar a *yield* da obrigação com cupão anual numa taxa nominal com capitalizações semestrais (utilizamos regime de capitalizacáo semestral) ou, em alternativa, transformar a *yield* da obrigação com cupão semestral em taxa efectiva anual (utilizamos regime de capitalização anual). Ao longo dos casos iremos sempre adoptar a segunda alternativa (regime de capitalização anual).

Sendo a emissão e reembolso ao par a taxa do cupão terá que ser no mínimo igual à YTM da obrigação de risco semelhante em termos de taxa efectiva (6.76%), pois, o cupão da obrigação MOTA & COMPANHIA é anual.

b)

Se a taxa do cupão for 6%, ou seja, inferior à YTM da obrigação de risco semelhante, então a obrigação MOTA & COMPANHIA terá que ser emitida a desconto para compensar o investidor de uma perda anual de rendimento igual a 0.76% (6.76% - 6%). O valor de emissão (VE) será igual a:

$$VE = \frac{600}{1.0676} + \frac{600}{1.0676^2} + \frac{600+5{,}000}{1.0676^3} + \frac{300+5{,}000}{1.0676^4} \Leftrightarrow VE = 9{,}770$$

ou 97.7% do VN.

Se a empresa quiser emitir ao par e com taxa do cupão igual a 6% terá que oferecer um prémio de reembolso (PR), isto é, as obrigações irão ter um valor de reembolso (VR) acima do valor nominal (sendo r = 6.76%):

$$10{,}000 = \frac{600}{1.0676} + \frac{600}{1.0676^2} + \frac{600+5{,}000+50\%\times PR}{1.0676^3} + \frac{300+5{,}000+50\%\times PR}{1.0676^4} \Leftrightarrow PR \cong 288.49.$$

Caso 2.6

Considere a seguinte obrigação do Tesouro alemã (DBR), a taxa fixa, cuja ficha técnica foi retirada do sistema de informação *Bloomberg*:

1 N248 Corp **DES**

SECURITY DESCRIPTION Redenominates on 1/ 1/99
DEUTSCHLAND REP DBR6 07/04/07 €✓ 108.8900/108.9400 (4.22/4.21) BGN @ 8:05

ISSUER INFORMATION
Name BUNDESREPUB. DEUTSCHLAND
Type Sovereign
Market of Issue EURO-ZONE

SECURITY INFORMATION
Country DE Currency EUR
Collateral Type BONDS
Calc Typ(60)GERMAN BONDS
Maturity 7/ 4/2007 Series 97
NORMAL
Coupon 6 FIXED
ANNUAL **ACT/ACT**
Announcement Dt 4/15/97
Int. Accrual Dt 4/25/97
1st Settle Date 4/25/97
1st Coupon Date 7/ 4/98
Iss Pr 100.9100

NO PROSPECTUS

IDENTIFIERS
Common 007600534
ISIN DE0001135036
Wertpap. 113503

RATINGS
Moody's Aaa
S&P AAA
Composite AAA

ISSUE SIZE
Amt Issued
EUR 15,338,756 (M)
Amt Outstanding
EUR 15,338,756 (M)
Min Piece/Increment
0.01/ 0.01
Par Amount 511.29

BOOK RUNNER/EXCHANGE

ALL GERMAN SE

1) Euro Redenomination
2) Additional Sec Info
3) Identifiers
4) Ratings
5) Fees/Restrictions
6) Custom Notes
7) Issuer Information
8) ALLQ
9) Pricing Sources
10) Related Securities
11) Executable Prices

65) Old DES
66) Send as Attachment

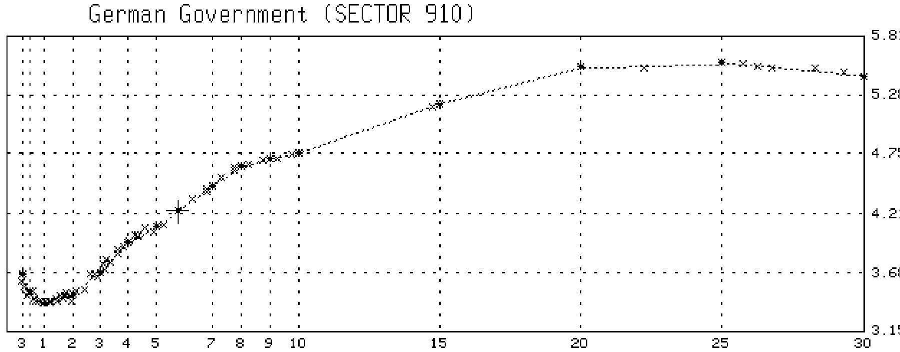
DM 6.3903BLN RETAINED FOR MKT INTERVENTION. LONG 1ST CPN. ADD'L DM 2BLN ISS'D 6/5/97, DM 2BLN 7/25/97, DM 2BLN 9/3/97, DM 1BLN 10/22/97, DM 8BLN 11/18/97.

Trata-se de uma obrigação de dívida pública, com vencimento em 04/07/2007, reembolso *bullet* e um cupão anual fixo de 6% (vencível no dia 04 de Julho de cada ano, sob a base de calendário ACT/ACT).

Considere ainda as seguintes taxas de juro *spot* sem risco (taxas efectivas anuais na base de calendário ACT/ACT):

3m	3.66
6m	3.50
1	3.40
2	3.47
3	3.68
4	3.95
5	4.09
7	4.46
8	4.63
9	4.71
10	4.76
15	5.21
20	5.54
25	5.56
30	5.45

German Government (SECTOR 910)



Pretende-se que responda às questões seguintes, utilizando a base de calendário ACT/ACT e considerando um desfasamento de 6 dias[13] de calendário entre as datas de negociação e de liquidação:

a) Formule uma decisão de compra ou de venda relativamente ao DBR 6% 04/07/2007, sabendo que esta obrigação está cotada a 108.89%-108.94% no dia 02/10/01.

b) Calcule a *yield-to-maturity* associada aos valores de cotação *bid* e *offer*.

c) Estime a taxa de rentabilidade efectiva anual gerada pela compra da obrigação em análise até à respectiva data de vencimento, assumindo o reinvestimento dos *cash flows* intermédios às actuais taxas de juro *forward*.

Solução

a)

Avaliação do DBR 6% 04/07/2007							
Trade date:	02/10/01	Avaliação:					
Settlement date:	08/10/01						
		Data	Prazo (anos)	Taxa de actualização	*Cash flow*	Valor actual	
DBR:							
Maturidade	04/07/07	04/07/02	0.736986	3.453%	6.000%	5.852%	
Taxa cupão	6.000%	04/07/03	1.736986	3.452%	6.000%	5.657%	
Frequência cupão	1 (anual)	04/07/04	2.736986	3.625%	6.000%	5.443%	
		04/07/05	3.736986	3.879%	6.000%	5.205%	
		04/07/06	4.736986	4.053%	6.000%	4.971%	
Taxas *spot* (sem risco):		04/07/07	5.736986	4.226%	106.000%	83.593%	
anos	taxa			**VT de equilíbrio:**		**110.719%**	
0.25	3.66%						
0.5	3.50%			AI:		1.578%	
1	3.40%						
2	3.47%			**Vc de equilíbrio:**		**109.14%**	
3	3.68%					*bid*	*offer*
4	3.95%			Vc de mercado:		108.89%	108.94%
5	4.09%						
7	4.46%			Decisão:		Comprar	

Nota: Taxas de actualização obtidas via interpolação linear.

b)

[13] Justificação: feriado da reunificação Alemã.

Calculo da YTM bid

	Vc de mercado:	*bid* 108.89%				
H.1) Utilizar fórmula do Excel						
YTM	4.218%					
H.2) Utilizar Solver ou GoalSeek						
		Data	Prazo (anos)	Taxa de actualização	*Cash flow*	Valor actual
VT mercado	110.468%	04/07/02	0.736986	4.218%	6.000%	5.820%
YTM	4.218%	04/07/03	1.736986	4.218%	6.000%	5.584%
		04/07/04	2.736986	4.218%	6.000%	5.358%
		04/07/05	3.736986	4.218%	6.000%	5.142%
		04/07/06	4.736986	4.218%	6.000%	4.933%
		04/07/07	5.736986	4.218%	106.000%	83.630%
						110.468%
					Error	0.000%

Calculo da YTM offer

	Vc de mercado:	*offer* 108.94%				
H.1) Utilizar fórmula do Excel						
YTM	4.209%					
H.2) Utilizar Solver ou GoalSeek						
		Data	Prazo (anos)	Taxa de actualização	*Cash flow*	Valor actual
VT mercado	110.518%	04/07/02	0.736986	4.209%	6.000%	5.820%
YTM	4.209%	04/07/03	1.736986	4.209%	6.000%	5.585%
		04/07/04	2.736986	4.209%	6.000%	5.360%
		04/07/05	3.736986	4.209%	6.000%	5.143%
		04/07/06	4.736986	4.209%	6.000%	4.936%
		04/07/07	5.736986	4.209%	106.000%	83.674%
						110.518%
					Error	0.000%

c)

Calculo da TRR assumindo reinvestimento a taxas de juro *forward*

Data	*Cash flow*	Prazo reinvestimento	Taxa *forward*	Valor acumulado
04/07/02	6.000%	5.000456413	4.340%	7.420%
04/07/03	6.000%	4.000547645	4.564%	7.173%
04/07/04	6.000%	2.997946612	4.782%	6.902%
04/07/05	6.000%	2	4.878%	6.600%
04/07/06	6.000%	1	5.051%	6.303%
04/07/07	106.000%	0		106.000%
			Total:	**140.398%**
			VT mercado	110.518%
			TRR	**4.259%**

Caso 2.7

As obrigações de capitalização automática do Estado foram emitidas há três anos, a uma taxa de juro fixa e anual de 10% (com capitalizações semestrais) e vencem-se dentro de dois anos. As obrigações de cupão zero do Estado com idêntica maturidade, tem uma cotação actual de 87.30%. O valor nominal de ambas as obrigações é 50 euros.

Pretende-se que:

Indique o preço máximo que está disposto a pagar pelas obrigações de capitalização automática.

Solução

Vamos em primeiro lugar determinar a YTM (y) das obrigações de cupão zero:

Cotação = 50 x 87.30% = 43.65 euros

$$43.65 = \frac{50}{(1+y)^2} \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{50}{43.65}} - 1 \Leftrightarrow y = 7.03\%$$

Para determinarmos o preço máximo (Bo) da obrigação de capitalização automática vamos utilizar como taxa de actualização a YTM da obrigação de cupão zero, pois são obrigações que pertencem a igual classe de risco (risco nulo).

A obrigação de capitalização automática gera um único *cash flow* no vencimento que se designa por valor acumulado (capital e juros); o valor da obrigação é dado pela actualização deste valor acumulado.

$$\text{V.Acumulado} = 50 \times \left(1 + \frac{0.10}{2}\right)^{(5\times2)} = 81.4447$$

$$B_0 = \frac{81.4447}{1.0703^2} = 71.0971$$

Saliente-se que neste caso não é necessário assumir uma curva de taxas de juro horizontal, pois a taxa de rendimento exigida foi calculada utilizando uma obrigação sem cupão, logo não existe problema quanto ao reinvestimento dos *cash-flows* intermédios.

Caso 2.8

Hoje foram estimadas as seguintes taxas de juro sem risco para o Euro:

Prazos	2 meses	6 meses	1 ano	1.5 anos	2 anos	2.5 anos
Taxas	4.6%	4.9%	5.2%	5.6%	6%	6.5%

Nota: taxas efectivas anuais (base de calendário: actual / actual).

Pretende-se que:

a) A empresa MPN pretende financiar-se por um prazo de 2 anos e num montante de EUR1,000,000. Para o efeito, encontra-se actualmente a estudar diferentes modalidades de financiamento via emissão de obrigações com cupão semestral. O *credit spread* da empresa MPN face a taxas de juro sem risco é estimado em 50 *basis points*. Determine qual deverá ser a taxa de cupão das obrigações, caso a empresa MPN pretenda emiti-las ao par com reembolso *bullet*.

b) Calcule a Taxa de Rendimento Realizado (TRR) gerada ao fim de 2 anos pela obrigação MPN definida na alínea anterior, assumindo o reinvestimento dos cupões em aplicações de idêntico risco e às taxas de juro *forward* actualmente em vigor.

c) Admitindo que as obrigações MPN são emitidas ao par e com o cupão definido na alínea a), calcule a respectiva *yield-to-maturity* efectiva anual.

Solução

a)

		Taxas *spot*	**0.5 anos**	**1 ano**	**1.5 anos**	**2 anos**
+ 0,5% ↓	•	Sem risco	4.9%	5.2%	5.6%	6%
	•	Com risco MPN	5.4%	5.7%	6.1%	6.5%

j ≡ tx de cupão nominal anual:

$$100\% = \frac{j/2}{(1.054)^{0.5}} + \frac{j/2}{(1.057)^{1}} + \frac{j/2}{(1.061)^{1.5}} + \frac{1 + j/2}{(1.065)^{2}}$$

$$\Rightarrow j \cong 6.368\%$$

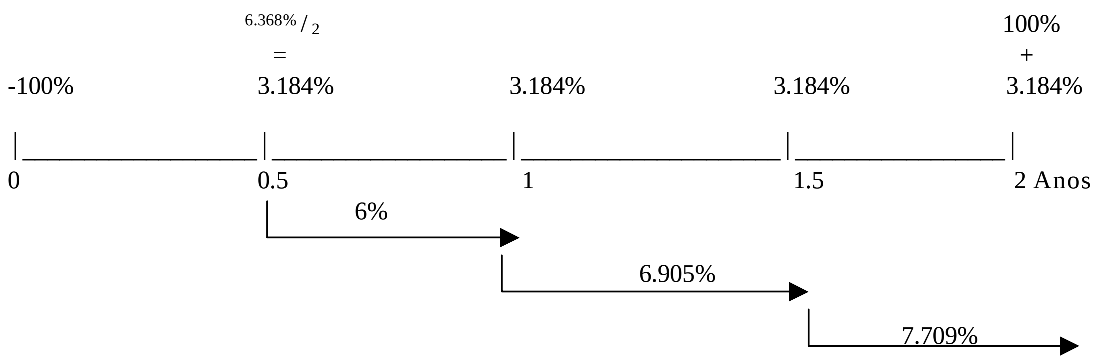
b)

Taxas *forward* com risco MPN:

- $f\,(0,0.5,1) \equiv f$:
  $1.057 = (1.054)^{0.5}\ \ (1+f)^{0.5} \Rightarrow f\,(0,0.5,1) = 6\%$

- $f\,(0,1,1.5) \Rightarrow f$:
  $(1.061)^{1.5} = 1.057\,(1+f)^{0.5} \Rightarrow f\,(0,1,1.5) = 6.905\%$

- $f\,(0,1.5,2) \equiv f$:
  $(1.065)^{2} = (1.061)^{1.5}\ \ (1+f)^{0.5} \Rightarrow f\,(0, 1.5,2) = 7.709\%$



TRR:

$$100\% \times (1 + \text{TRR})^{2} = \{[3.184\%\,(1.06)^{0.5} + 3.184\%](1.06905)^{0.5} + 3.184\%\} \times (1.07709)^{0.5} + 103.184\%$$

$$\Leftrightarrow \text{TRR} = \sqrt{\frac{113.4227\%}{100\%}} - 1 \cong 6.5\%$$

c)

A YTM efectiva semestral será igual ao valor do cupão semestral, ou seja, 3.184%. A taxa efectiva anual equivalente é dada por $(1.03184)^{2} - 1 \cong 6.469\%$.

Com efeito,

$$100\% = \frac{3.184\%}{(1+\mathrm{YTM})^{0.5}} + \frac{3.184\%}{(1+\mathrm{YTM})^{1}} + \frac{3.184\%}{(1+\mathrm{YTM})^{1.5}} + \frac{103.184\%}{(1+\mathrm{YTM})^{2}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{YTM} \cong 6.469\%.$$

Caso 2.9

Hoje (19/06/01; 3ª feira) foram estimadas as seguintes taxas de juro sem risco para o EUR:

Prazos	0.4 anos	0.896 anos	1 ano	1.4 anos	3 anos	4 anos
Taxas	4.80%	4.965%	5.00%	5.071%	5.60%	6%

Nota: taxas efectivas anuais (base de calendário: actual/actual).

Considere uma obrigação de dívida privada com vencimento no dia 15/11/2002, com uma notação de *rating* BBB (S&P) e com uma taxa de cupão igual à Euribor a 6 meses mais 80 *basis points* (cupão semestral na base de calendário 30/360).

A taxa do próximo cupão é igual a 5.3% e o *credit spread* de equilíbrio entre os mercados monetário e do Tesouro é actualmente igual a 0.20%. Actualmente, o número de dias de juros vencidos é igual a 37 dias (30/360) e o *credit spread* de equilíbrio da classe de risco BBB (S&P) é igual a 0.90% (face a taxas interbancárias).

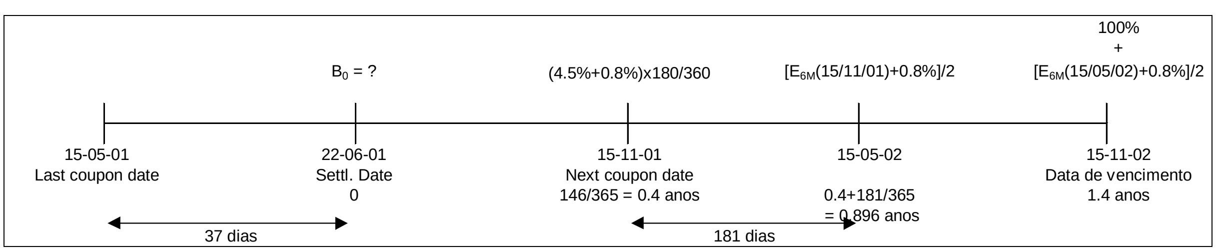
Sabendo que a obrigação está actualmente cotada a 99.61%(*bid*)/99.65%(*offer*), formule uma decisão de compra ou de venda. NOTA: o número de dias de calendário entre 22/06/2001 e 15/11/2001 é igual a 146 dias ; o número de dias de calendário entre 15/11/2001 e 15/05/2002 é igual a 181 dias.

Solução

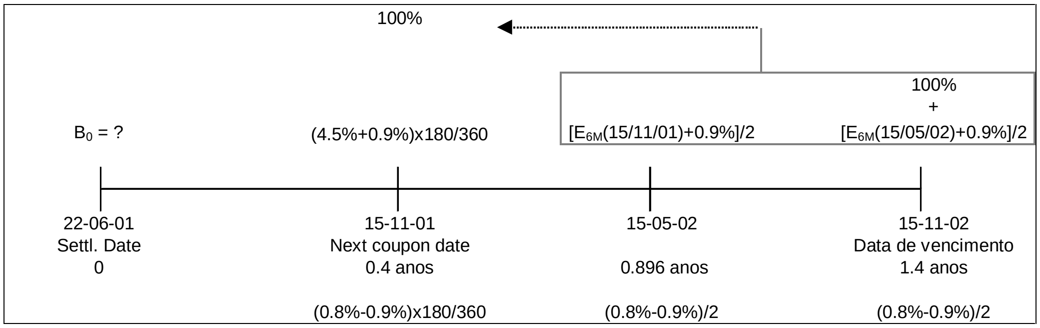
Settlement date = 19/06/01 + 3 dias de calendário = 22/06/01.

Taxa do próximo cupão = 5.3% $\Rightarrow$ Euribor a 6 meses no dia 15/05/2001 = 5.3%-0.8% = 4.5%.

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



Utilizando a fórmula geral de avaliação (2.11):

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{100\% + \dfrac{4.5\% + 0.9\%}{2}}{(1 + 4.8\% + 0.2\% + 0.9\%)^{0.4}} \\
&+ \frac{0.8\% - 0.9\%}{2} \times \left[(1 + 5.9\%)^{-0.4} + (1 + 4.965\% + 1.1\%)^{-0.896} + (1 + 5.071\% + 1.1\%)^{-1.4} \right] \\
&= 100.37\% - 0.14\% = 100.23\%.
\end{aligned}
$$

$$AI = \frac{5.3\%}{2} \times \frac{37}{180} \cong 0.54\%.$$

Decisão:

$VT_0^{bid} = 99.61\% + 0.54\% = 100.15\% < B_0 \Rightarrow$ Não vender;

$VT_0^{ask} = 99.65\% + 0.54\% = 100.19\% < B_0 \Rightarrow$ Comprar.

Caso 2.10

Considere uma obrigação de dívida privada com vencimento no dia 12/02/2002, com uma notação de rating BB (S&P) e com uma taxa de cupão igual à Euribor a 3 meses mais 90 *basis points* (cupão trimestral na base de calendário 30/360). A taxa do próximo cupão é igual a 5.1% e o *credit spread* de equilíbrio da classe de risco BB (S&P) é igual a 1.10% (face a taxas interbancárias).

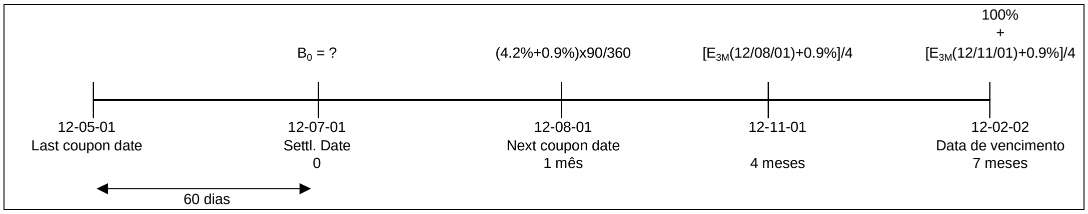
Actualmente, o número de dias de juros vencidos é igual a 60 dias (30/360) e a obrigação está cotada a 99.90%(*bid*)/99.95%(*offer*) para a *trade date* de 09/07/01 (2ª feira). Formule uma decisão de *trading*, sabendo que vigoram actualmente as seguintes taxas Euribor (convertidas para a base de calendário 30/360): 4.5% a 1 mês, 4.75% a 4 meses e 5% a 7 meses.

Solução

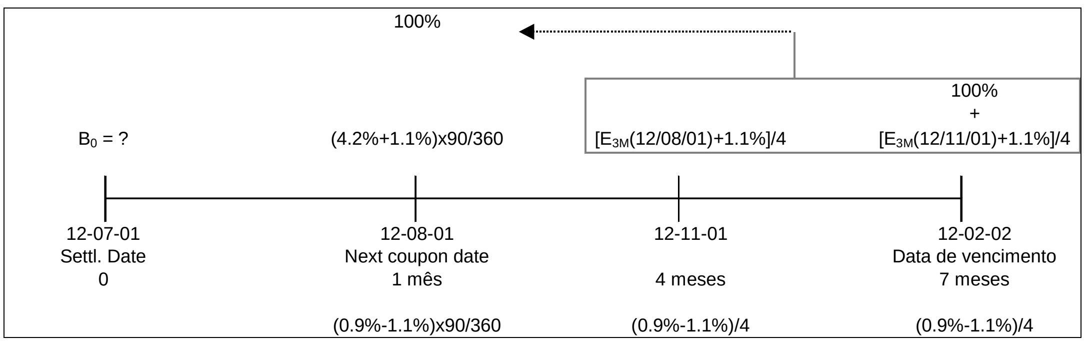
Settlement date = 09/07/01 + 3 dias de calendário = 12/07/01.

Taxa do próximo cupão = 5.1% $\Rightarrow$ Euribor a 3 meses no dia 12 / 05 / 2001 = 5.1%-0.9% = 4.2%.

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



Utilizando a fórmula geral de avaliação (2.11):

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \frac{100\% + \dfrac{4.2\% + 1.1\%}{4}}{1 + (4.5\% + 1.1\%) \times \dfrac{1}{12}} \\
&+ \frac{0.9\% - 1.1\%}{4} \times \left[\left(1 + 5.6\% \times \frac{1}{12}\right)^{-1} + \left(1 + (4.75\% + 1.1\%) \times \frac{4}{12}\right)^{-1} + \left(1 + (5\% + 1.1\%) \times \frac{7}{12}\right)^{-1} \right] \\
&= 100.85\% - 0.15\% = 100.71\%.
\end{aligned}
$$

$$
AI = 5.1\% \times \frac{60}{360} = 0.85\%.
$$

Decisão:

$VT_0^{bid} = 99.90\% + 0.85\% = 100.75\% > B_0 \Rightarrow$ Vender;

$VT_0^{ask} = 99.95\% + 0.54\% = 100.80\% > B_0 \Rightarrow$ Não comprar.

Caso 2.11

Considere as seguintes obrigações com risco e valor nominal idêntico (50 euros):

	X	Y
Taxa cupão	5%	4.5%
Periodicidade do cupão	anual	semestral
Maturidade (anos)	5	2

Admita que a taxa de rendimento (YTM) das obrigações de risco semelhante é igual a 5% e que a curva de taxas de juro é horizontal.

Pretende-se que:

a) Determine o preço das obrigações X e Y.

b) Calcule as seguintes medidas para as obrigações X e Y:
   i) Duração de Macaulay
   ii) Convexidade

c) Suponha que a curva de taxas de juro sofreu um choque aditivo de 100 pontos de base. Qual o novo valor das obrigações X e Y?

d) Reformule a alínea anterior utilizando as seguintes medidas:
   i) Duração
   ii) Duração e convexidade

   Comente os resultados obtidos nas alíneas c) e d).

Solução

a)

$$\text{Obrigação X}: \quad B_0 = \frac{2.5}{1.05} + \frac{2.5}{1.05^2} + \frac{2.5}{1.05^3} + \frac{2.5}{1.05^4} + \frac{50+2.5}{1.05^5} = 50 \quad \text{ou } B_0 = 100\% \Leftarrow \quad \text{T.cupão} = r \Rightarrow B_0 = VN$$

$$\text{Obrigação Y}: \quad B_0 = \frac{1.125}{1{,}0247} + \frac{1.125}{1{,}0247^2} + \frac{1.125}{1{,}0247^3} + \frac{50+1.125}{1{,}0247^4} = 49.5867$$

A taxa de actualização (r) para a obrigação Y é a taxa equivalente semestral à YTM :

$$r = (1+0.05)^{1/2} - 1 = 2.47\%$$

b)

i) Duração de Macaulay

No caso presente estamos a admitir que a curva de taxas de juro é *flat*. Assim, a medida de duração que iremos utilizar é a designada duração de Macaulay, que apenas é consistente com um processo de evolução de taxas de juro em que uma curva de taxas de juro rasa se desloca paralelamente (sem alteração da inclinação). A duração não é mais do que uma medida de sensibilidade do preço de uma obrigação a alterações das taxas de juro de mercado. Esta medida é obtida através da expressão (2.12), considerando uma única taxa de actualização.

Obrigação X

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t
1	2.5	0.9524	2.3810	2.3810
2	2.5	0.9070	2.2676	4.5351
3	2.5	0.8638	2.1596	6.4788
4	2.5	0.8227	2.0568	8.2270
5	52.5	0.7835	41.1351	205.6756
		totais	**50.00**	**227.30**

$$DM_X = \frac{227.30}{50} = 4.546 \text{ anos}$$

Obrigação Y

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t
0.5	1.125	0.9759	1.0979	0.5489
1	1.125	0.9524	1.0714	1.0714
1.5	1.125	0.9294	1.0456	1.5684
2	51.125	0.9070	46.3719	92.7438
		totais	**49.59**	**95.93**

$$DM_Y = \frac{95.93}{49.59} = 1.935 \text{ anos}$$

ii) Convexidade

A relação entre taxa de juro e o preço da obrigação é dada por uma curva com forma convexa. A convexidade (C) constitui uma segunda medida para quantificarmos a exposição do preço da obrigação ao risco de taxa de juro. A medida de convexidade é dada pela equação (2.17).

Obrigação X

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t	CF Act x t x (t+1)
1	2.5	0.9524	2.3810	2.3810	4.7619
2	2.5	0.9070	2.2676	4.5351	13.6054
3	2.5	0.8638	2.1596	6.4788	25.9151
4	2.5	0.8227	2.0568	8.2270	41.1351
5	52.5	0.7835	41.1351	205.6756	1234.0537
		totais	**50.00**	**227.30**	**1319.47**

$$C_X = \frac{1,319.48}{50} = 26.389.$$

Obrigação Y

t	CF	Fact Act	CF Act	CF Act x t	CF Act x t x (t+1)
0.5	1.125	0.9759	1.0979	0.5489	0.8234
1	1.125	0.9524	1.0714	1.0714	2.1429
1.5	1.125	0.9294	1.0456	1.5684	3.9210
2	51.125	0.9070	46.3719	92.7438	278.2313
		totais	**49.59**	**95.93**	**285.12**

$$C_Y = \frac{285.12}{49.59} = 5.75$$

c)

Uma subida da taxa de juros de 100 pontos base (a taxa de actualização passa de 5% para 6%) irá provocar uma descida do preço das obrigações igual a:

$$\text{Obrigação X}: \quad B_0 = \frac{2.5}{1.06} + \frac{2.5}{1.06^2} + \frac{2.5}{1.06^3} + \frac{2.5}{1.06^4} + \frac{50 + 2.5}{1.06^5} = 47.8938 \text{ ou } B_0 = 95.7876\%,\ \Delta\%B_0 = -4.212\%$$

$$\text{Obrigação Y}: \quad B_0 = \frac{1.125}{1,02956} + \frac{1.125}{1,02956^2} + \frac{1.125}{1,02956^3} + \frac{50 + 1.125}{1,02956^4} = 48.6865 \text{ ou } B_0 = 97.373\%,\ \Delta\%B_0 = -1.815\%$$

A taxa de actualização (r) para a obrigação Y é a taxa equivalente semestral à YTM :

$$r = (1 + 0.06)^{1/2} - 1 = 2.956\%$$

d)

i) Utilizando a medida de duração podemos estimar qual o impacto no preço da obrigação de uma variação da taxa de juro (100 p.b.) a partir da fórmula (2.16).

Esta relação, para o exemplo em análise, dada pela duração para estimar a variação do valor da obrigação só é válida em condições restritivas:

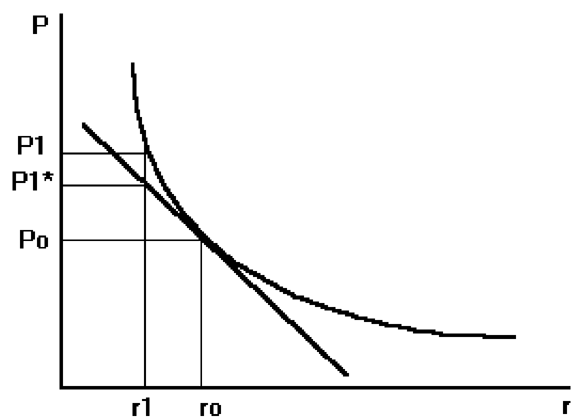
a) Variação infinitesimal da taxa de juro;
b) A curva de taxas de juro ter uma inclinação horizontal (curva flat);
c) Deslocamentos paralelos da curva de taxas de juro (choques aditivos).

Apenas é razoável admitir que a *yield to maturity* para todas as obrigações varia no mesmo valor para uma dada alteração da curva de taxas de juro, quando esta tem inclinação horizontal. Caso contrário, para uma dada alteração da curva de taxas de juro, as *yields to maturity* de diferentes obrigações variam por diferentes valores.

$$\text{Obrigação X}: \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -4.546 \times \frac{1\%}{1.05} = -4.329\%$$

$$\text{Obrigação Y}: \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -1.935 \times \frac{1\%}{1.05} = -1.843\%$$

Existe alguma divergência entre a variação percentual do preço estimada através da duração e os cálculos efectuados na alínea c). Esta divergência resulta do facto de a curva que estabelece a relação entre o preço da obrigação e a taxa de juro ser convexa, ou seja, não ter uma inclinação constante. A duração não capta o efeito da convexidade quando a taxa de juro varia, sendo o erro cometido (no gráfico seguinte a distância entre o ponto P1 e P1*, ou seja, entre a curva e a recta) tanto maior quanto maior for a variação da taxa de juro. A expressão que apenas utiliza a duração subavalia sempre o verdadeiro valor da obrigação após a variação da taxa de juro.



Portanto, a expressão que permite estimar o impacto sobre o preço duma alteração da taxa de juro recorrendo à duração, só é válida para variações muito pequenas taxa de juro.

$$\Delta^{+} r \Rightarrow \Delta\% B_{estimada} > \Delta\% B_{real}$$
$$\Delta^{-} r \Rightarrow \Delta\% B_{estimada} < \Delta\% B_{real}$$

ii) A introdução da medida de convexidade permite obter uma estimativa mais aproximada da variação percentual do preço da obrigação em consequência de uma variação da taxa de juro. A nova expressão será a dada pela equação (2.19).

$$\text{Obrigação X}: \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -4.546 \times \frac{1\%}{1.05} + \frac{1}{2} \times 26.389 \times \left(\frac{1\%}{1.05} \right)^2 = -4.198\%$$

$$\text{Obrigação Y}: \frac{\Delta B_0}{B_0} \approx -1.935 \times \frac{1\%}{1.05} + \frac{1}{2} \times 5.75 \times \left(\frac{1\%}{1.05} \right)^2 = -1.814\%$$

A comparação dos valores obtidos com os resultantes da utilização da expressão que apenas utiliza a duração, permite-nos concluir que a introdução da convexidade permite obter um valor mais aproximado para a variação percentual do valor da obrigação resultante de uma alteração da taxa de actualização. A diferença ainda existente resulta de desprezarmos os termos de ordem superior a 2 na expansão em série de Taylor.

A convexidade tem implicações em termos de avaliação de obrigações, sendo o seu valor relativo maior quando a volatilidade esperada das taxas de juro é maior, ou seja, quanto maior for a variação esperada das taxas de juro, maior o valor que os investidores atribuem a uma obrigação com maior convexidade (tudo o resto constante: *yield*, preço e duração).

Caso 2.12

O preço actual dos Bilhetes do Tesouro (BT's) pelo prazo de um ano é de 95.2381% (valor nominal 10,000 euros). Assuma que a expectativa do mercado quanto à evolução das taxas a 1 ano para os próximos três anos é a seguinte:

Ano 2: 6%
Ano 3: 6.5%
Ano 4: 7%

As obrigações do Tesouro cujo valor nominal é de 10,000 euros, vencem-se dentro de 4 anos e pagam um cupão anual de 500 euros.

Pretende-se que:

a) Construa a curva de taxas *spot* com risco nulo.

b) Determine o preço que está disposto a pagar pela obrigação do Tesouro.

c) Calcule a *yield to maturity* da obrigação do Tesouro.

d) Calcule a duração da obrigação do Tesouro.

e) Admitindo que a curva de taxas de juro registou, no início do ano 1, um choque multiplicativo dado por um factor de 0.01, qual o novo preço da obrigação do tesouro?

Solução

a)

A taxa de juro *spot* para t-anos é a taxa de juro para um investimento efectuado hoje e com vencimento dentro de t-anos - r(0,t). Este investimento tem uma característica particular que consiste em não efectuar qualquer pagamento intermédio, ou seja, paga um único *cash flow* na maturidade (exemplos deste tipo de investimento são as obrigações de cupão zero e as obrigações de capitalização automática). Por esta razão, as taxas de juro *spot* são, usualmente, designadas de "*zero coupon yield*".

As taxa de juro *forward* são taxas de juro decorrentes das taxas *spot* correntes, para investimento efectuados no futuro. A característica principal destas resulta do investimento ser efectuado no futuro e não hoje. Estas taxas são calculadas por relações de arbitragem – vide equação (2.3). Por exemplo, uma taxa *forward* para um investimento efectuado dentro de 1 ano e com vencimento dentro de 2 anos - r(1,2) - será calculada com base nas taxas *spot* a 1 ano e a 2 anos. A relação de arbitragem será a seguinte: um investimento efectuado hoje por 2 anos tem que ter igual rendimento a um investimento efectuado hoje por 1 ano mais um investimento efectuado dentro de 1 ano com vencimento dentro de 2 anos. Temos que:

$$(1+r(0,2))^2 = (1+r(0,1))\times(1+f(0,1,2)) \Leftrightarrow (1+f(0,1,2)) = \frac{(1+r(0,2))^2}{(1+r(0,1))}$$

Generalizando para qualquer taxa *forward* para o prazo de 1 ano:

$$(1+f(0,t,t+1))=\frac{(1+r(0,t+1))^{t+1}}{(1+r(0,t))^{t}}$$

O conceito de taxa *forward* é similar a uma taxa marginal, enquanto, uma taxa *spot* é similar a uma taxa média. Assim, quando a taxa *forward* está abaixo da taxa *spot* num determinado momento, a taxa *spot* está a diminuir com a maturidade; quando a taxa *forward* está acima da taxa *spot*, a taxa *spot* está a aumentar com a maturidade do investimento. Efectivamente, uma taxa *spot* para um investimento por t-anos poder ser escrita como uma média (geométrica) das sucessivas taxas *forward* para o prazo de 1 ano:

$$r(0,t)=\sqrt[t]{(1+r(0,1))\times(1+f(0,1,2))\times\ldots\times(1+f(0,t-1,t)}$$

As taxas *forward* podem ainda ser calculadas para investimentos com prazo diferente de 1 ano. Assim, uma taxa forward com prazo de n-anos é igual a:

$$(1+f(0,t,t+n))=\sqrt[n]{\frac{(1+r(0,t+n))^{t+n}}{(1+r(0,t))^{t}}}$$

A curva de taxas *spot* é a curva que mostra a relação entre taxas *spot* (*zero coupon yield*) e maturidade. É importante distingir entre "*zero coupon yield curve*" e a curva de taxas de juro que é construída com base nas *yield to maturity* de obrigações com cupão. As *yields* de obrigações com cupão (y) assumem o reinvestimento dos *cash flows* intermédios a uma taxa igual à própria *yield*, o que não é correcto numa situação de curva não horizontal. Apenas no caso de curva horizontal (taxa *spot* idêntica para qualquer maturidade), a *yield* de uma obrigação com cupão com maturidade de t-anos coincide com a taxa *spot* idêntica maturidade.

1) Se $r(0,1) = r(0,2) = \ldots = r(0,t)$ então $r(0,t) = y, \ \forall t$
2) Se $r(0,1) > r(0,2) > \ldots > r(0,t)$ então $\min r(0,t) < y < \max r(0,t)$
3) Se $r(0,1) < r(0,2) < \ldots < r(0,t)$ então $\min r(0,t) < y < \max r(0,t)$

No caso de curva ascendente (2), a taxa *spot* é superior à *yield* de uma obrigação com cupão para qualquer maturidade. No caso de curva descendente (3), a taxa *spot* é inferior à *yield* de uma obrigação com cupão para qualquer maturidade.

Concluindo, a curva de taxas de juro *spot* é construída utilizando obrigações sem cupão do Tesouro, pois, os títulos sem risco constituem a referência (benchmark) para os diferentes níveis de risco de crédito.

No nosso caso, podemos utilizar os Bilhetes do Tesouro (títulos sem *cash flows* intermédios) para determinar a taxa *spot* a 1 ano, que é igual à *yield* do BT a 1ano:

$$r(0,1)=\frac{10{,}000}{9{,}523.81}-1=5\%$$

Tendo as expectativas para a *yield* dos BT's a 1 ano para os anos seguintes (conjunto de taxas *forward* para prazo de 1 ano) podemos calcular as diversas taxas *spot*:

$$r(0,2) = \sqrt{1.05 \times 1.06} - 1 = 5.5\%$$
$$r(0,3) = \sqrt[3]{1.055^2 \times 1.065} - 1 = 5.83\%$$
$$r(0,4) = \sqrt[4]{1.0583^3 \times 1.07} - 1 = 6.12\%$$

b)

O preço de uma obrigação deve ser igual ao valor actualizado dos *cash flows* gerados por esse investimento. O valor da obrigação será calculado utilizando a curva de taxas de juro que determinámos, pois trata-se de uma obrigação do Tesouro, pertencente a idêntica classe risco que os Bilhetes do Tesouro (BT's).

$$B_0 = \frac{500}{1.05} + \frac{500}{1.055^2} + \frac{500}{1.0583^3} + \frac{10,500}{1.0612^4} = 9,626.68$$

c)

$$9,626.68 = \frac{500}{(1+y)} + \frac{500}{(1+y)^2} + \frac{500}{(1+y)^3} + \frac{10,500}{(1+y)^4}$$
$$y = YTM = 6.08\%$$

Como tinha-mos visto na alínea a), a yield to maturity situa-se entre a taxa máxima e mínima do conjunto de taxas *spot*.

d)

Estamos perante uma situação de curva de taxas de juro não rasa (neste caso inclinação positiva), sendo a medida de duração a utilizar a designada duração de Fisher-Weil. A duração de Macaulay que utiliza como taxa de actualização a *yield to maturity* deixa de ser válida para curva de taxas de juro não horizontal, pois, para uma dada alteração das taxas *spot* temos que as *yield to maturity* variam de diferentes valores para diferentes títulos. Dito de outro modo, alterações nas taxas *spot* não estão igualmente relacionadas com variações da *yield to maturity*, pois, uma dada variação da *yield to maturity* é consistente com diferentes variações das taxas *spot*. Assim, para uma curva não horizontal, a variação do preço da obrigação para uma variação das taxas *spot* deixa de ser proporcional à duração de Macaulay (esta medida só é consistente para alterações da *yield to maturity*).

A duração de Fisher-Weil é obtida via equação (2.12):

t	CF_t	Factor Actualização	VA CF_t	VA CF_t x t
1	500	0.95238	476.19	476.2
2	500	0.89845	449.23	898.5
3	500	0.84367	421.84	1,265.5
4	10,500	0.78852	8,279.43	33,117.7
			9,626.68	35,757.9

$$\mathrm{DFW} = \frac{35{,}757.90}{9{,}626.68} = 3.7144 \text{ anos} .$$

e)

Tal como fizemos para o caso em que a curva de taxas de juro é rasa, podemos através do conceito de duração, calcular a variação do preço de uma obrigação em função de uma determinada variação nas taxas de juro. Esta medida de duração só é válida, isto é, a variação proporcional do valor da obrigação só é proporcional à duração de Fisher-Weil, em determinadas condições:

. Variações infinitesimais da curva de taxas de juro devido à convexidade, como vimos anteriormente;

. Se a curva de taxas de juro se deslocar todos os factores de desconto para diferentes maturidades (taxa de juro mais a unidade) sofrerem a mesma variação proporcional, ou seja, desde que a equação (2.15) seja válida:

$$\frac{dr(0,1)}{1+r(0,1)} = \ldots = \frac{dr(0,t)}{1+r(0,t)} = \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^*(0,t) = r(0,t) + dr(0,t) \Leftrightarrow r^*(0,t) = r(0,t) + \lambda \cdot (1 + r(0,t)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1 + r^*(0,t)) = (1 + r(0,t)) \cdot (1 + \lambda)$$

Deste modo, a duração de Fisher-Weil só é consistente com um processo de evolução da curva de taxas, em que esta sofre choques multiplicativos dados por um factor constante (λ) com a maturidade. A variação das taxas curtas poderá ser maior ou menor que a das taxas longas, consoante, a curva de taxas de juro seja descendente ou ascendente, respectivamente. De qualquer modo, as taxas longas e curtas tem que estar perfeitamente correlacionadas, tal como, para a duração de Macaulay. Via equação (2.16),

$$\frac{dB_0}{B_0} = -\frac{dr(0,t)}{1+r(0,t)} \cdot \mathrm{DFW} = -0.01 \times 3.7145 = -3.7145\%$$

$$B_0^* = B_0 + B_0 \cdot dB_0 = 9{,}626.68 - 0.037145 \times 9{,}626.68 = 9{,}269.10.$$

Caso 2.13

Considere as seguintes obrigações:

A. *Taxa fixa (Rating AA)*
Valor nominal – 10,000 euros
Taxa do cupão - 5% (cupão anual)
Maturidade - 4 anos
Reembolso - no final
Preço de cotação – 96.0%

B. *Taxa fixa (Rating AA)*
Valor nominal – 5 euros
Taxa do cupão – 5.5% (cupão semestral)
Maturidade - 1,5 anos
Reembolso - 50% (dentro de 1 ano); 50% (dentro de 1.5 anos)
Preço de cotação - 106.2%

C. *Capitalização Automática (Rating AA)*
Valor nominal – 1 euro
Taxa do cupão – 5.25% (cupão anual)
Maturidade - 1 ano (emitida há 2 anos)
Preço de cotação - 110.0%

Informações adicionais:

- Nas obrigações com rating AA considera-se um prémio aditivo de 0.125 pontos percentuais face aos títulos do tesouro.
- Relativamente aos títulos do tesouro considere as seguintes informações:

Título	**Maturidade (anos)**	**Taxa Cupão (%)**	**Preço euros**
BT	0.5	--	9,759.00
BT	1.0	--	9,501.19
OT	1.5	5.25 (semestral)	10,000.00
OT	2.0	4.5 (semestral)	9,806.71
CZ	3.0	--	8,396.19
CZ	4.0	--	7,846.65

Nota:
Os BT´s, as OT´s e as obrigações de Cupão Zero tem um valor nominal de 10,000 euros.

Pretende-se que:

a) Determine a curva de taxas *spot* vigente no mercado.

b) Calcule o valor das obrigações A, B, C identificando a respectiva decisão a tomar.

c) Calcule a *yield to maturity* das obrigações A, B e C.

d) Calcule a duração das obrigações A, B e C.

e) Decorrido um ano, admita que a curva de taxas de juro sofreu um choque multiplicativo dado por um factor de 0.01.

e.1) Construa a nova curva de taxas de juro.

e.2) Calcule o novo preço (real) da obrigação A.

Solução

a)

Vamos determinar a curva de taxas *spot* (títulos do Tesouro) de acordo com a informação disponível. Em primeiro lugar, vamos calcular as taxas *spot* a 6 meses e 1 ano a partir dos bilhetes do Tesouro:

$$\text{BT 0.5 anos} \qquad 9.759.00 = \frac{10,000}{\left[1 + r(0,0.5)\right]^{0,5}} \Leftrightarrow r(0,0.5) = 5\%$$

$$\text{BT 1 ano} \qquad 9,501.19 = \frac{10,000}{\left[1 + r(0,1)\right]^{1}} \Leftrightarrow r(0,1) = 5.25\%$$

Para as maturidades de 1,5 e 2 anos não temos disponíveis títulos sem cupão. Vamos utilizar obrigações com cupão encarando estas como um conjunto de obrigações sem cupão (cada *cash flow* corresponde a uma obrigação sem cupão).

$$OT\ \text{1.5 anos} \qquad 10,0\,00 = \frac{262.5}{1.05^{0.5}} + \frac{262.5}{1.05125^{1}} + \frac{10,262.5}{\left[1 + r(0,1.5)\right]^{1.5}} \Leftrightarrow r(0,1.5) = 5.325\%$$

$$OT\ \text{2 anos} \qquad 9,806.71 = \frac{225}{1.05^{0.5}} + \frac{225}{1.05125^{1}} + \frac{225}{1.0532^{1.5}} + \frac{10,225}{\left[1 + r(0,2)\right]^{2}} \Leftrightarrow r(0,2) = 5.625\%$$

Para as maturidades de 3 e 4 anos existem obrigações de cupão zero; assim, para determinarmos as taxas *spot* para estas maturidades basta calcular a taxa de rendimento destas obrigações.

$$\text{CZ 3 anos} \qquad 8,396.19 = \frac{10,000}{\left[1 + r(0,3)\right]^{3}} \Leftrightarrow r(0,3) = 6\%$$

$$\text{CZ 4 anos} \qquad 7,846.65 = \frac{10,000}{\left[1 + r(0,4)\right]^{4}} \Leftrightarrow r(0,4) = 6.25\%$$

As curvas de taxas *spot* vigentes no mercado são as seguintes:

Prazo	**0.5**	**1**	**1.5**	**2**	**3**	**4**
T.Tesouro (%)	5.00	5.25	5.325	5.625	6.00	6.25
Rating AA (%)	5.125	5.375	5.45	5.75	6.125	6.375

b)

Cálculo do valor das obrigações:

$$Obrigação\ A: \quad P_0 = \frac{500}{1.05375} + \frac{500}{1.0575^2} + \frac{500}{1.06125^3} + \frac{500 + 10{,}000}{1.06375^4} = 9{,}540.25$$

$$Obrigação\ B: \quad P_0 = \frac{0.275}{1.05125^{0,5}} + \frac{0.275 + 2.5}{1.05375^1} + \frac{0.1375 + 2.5}{1.0545^{1,5}} = 5.3374$$

$$Obrigação\ C: \quad \text{V.Acumulado} = 1.0 \times 1.0525^3 = 1.1659$$

$$P_0 = \frac{1.1659}{1.05375} = 1.1064$$

Decisão: resulta da comparação entre o valor da obrigação (Po) e o preço de cotação (Pcot)

Para Po > Pcot => comprar obrigações B e C
Para Po < Pcot => vender obrigação A

c) Cálculo da *yield to maturity* (y):

$$Obrigação\ A: \quad \frac{500}{(1+y)} + \frac{500}{(1+y)^2} + \frac{500}{(1+y)^3} + \frac{500 + 10{,}000}{(1+y)^4} = 9{,}540.25 \Rightarrow y = 6.3371\%$$

$$Obrigação\ B: \quad \frac{0.275}{(1+y)^{0,5}} + \frac{0.275 + 2.5}{(1+y)^1} + \frac{0.1375 + 2.5}{(1+y)^{1,5}} = 5.3374 \Rightarrow y = 5.4102\%$$

$$Obrigação\ C: \quad \frac{1.1659}{(1+y)} = 1.1064 \Rightarrow y = 5.375\%$$

d) Calculo da duração (Fisher-Weil) das obrigações A, B e C:

Obrigação A

t	CFt	Factor Actualização	VA CFt	VA CFt x t
1	500	0.9490	474.50	474.50
2	500	0.8942	447.10	894.21
3	500	0.8367	418.33	1,254.98
4	10,500	0.7810	8,200.32	32,801.30
			9,540.25	35,424.98

$$D = \frac{35{,}424.98}{9{,}540.25} = 3.7132 \ anos$$

Obrigação B

t	CFt	Factor Actualização	VA CFt	VA CFt x t
0.5	0.2750	0.9753	0.2682	0.1341
1	2.7750	0.9490	2.6335	2.6335
1.5	2.6375	0.9235	2.4357	3.6535
			5.3374	6.4211

$$\mathrm{D} = \frac{6.4211}{5.3374} = 1.2030 \ \mathrm{anos}$$

Obrigação C

As obrigações de capitalização automática de taxa fixa tem duração igual à maturidade (1 ano).

e)

e.1)

Decorrido um ano a curva de taxas de juro sofreu um choque multiplicativo com um factor (λ) igual a 0.01

As novas taxas *spot* (sem risco) resultam das taxas *forward* implícitas na estrutura inicial e do choque aleatório, sendo dadas pela seguinte expressão:

$$\mathrm{r}^*(0,\mathrm{t}) = \mathrm{r}(1,\mathrm{t}+1) + \lambda \cdot (1 + \mathrm{r}(1,\mathrm{t}+1))$$

Anos (t)	0.5	1	1.5	2	3	4
Tx.spot r(0,t)	5.00	5.25	5.325	5.625	6.00	6.25
Tx.forward r(1,t+1)*	5.4752	6.00	-	6.3770	6.5854	-
Tx.spot r*(0,t)	6.53	7.06	-	7.4408	7.6513	-

* Calculo das taxas *forward* r(1,1.5), para exemplificar:

$$r(1{,}1.5) = \sqrt[0.5]{\frac{(1+r(0{,}1.5))^{1.5}}{(1+r(0{,}1))}} - 1 = 5.4752\%$$

Curva de taxas spot:

Anos (t)	0.5	1	1.5	2	3	4
T.Tesouro (%)	6.53	7.06	-	7.4408	7.6513	-
Rating AA (%)	6.655	7.185	-	7.5658	7.7763	-

e.2)

$$\textit{Obrigação A}: \quad P_1 = \frac{500}{1.07185^1} + \frac{500}{1.075658^2} + \frac{500+10{,}000}{1.077763^3} = 9{,}285.87$$

Caso 2.14

As obrigações do Tesouro TRM, com valor nominal de EUR100, vencem-se dentro de 4 anos e pagam um cupão anual de 10.2%. Actualmente, as obrigações TRM apresentam um preço de 113.62% e uma duração de 3.5 anos.

A curva de taxas de juro para títulos do Tesouro é a seguinte:

Anos (t)	1	2	3	3.5	4
Taxas spot - r(0,t)	4%	4.5%	5%	6.5%	6.5%

Pretende-se que:

a) Considere uma carteira constituída por uma obrigação TRM. Identifique o momento e o valor que é possível imunizar através da aquisição de uma obrigação TRM.

b) Responda à questão anterior admitindo que a obrigação TRM é de cupão zero (valor nominal EUR100).

c) Compare, em termos de eficiência, a situação da alínea b) com a da alínea c).
(sugestão: construa um exemplo em que a imunização não é eficiente)

Solução

a)

A aquisição de uma obrigação com cupão permite imunizar um determinado valor num horizonte temporal (h) igual à duração dessa obrigação, mesmo que entretanto a curva de taxas de juro sofra alterações. A imunização decorre do efeito de compensação entre duas componentes: reinvestimento dos *cash flows* e preço do título, que atingem amplitudes idênticas num momento coincidente com a duração do título em questão.

Estamos perante uma situação de curva de taxas de juro não rasa (neste caso inclinação positiva), sendo a medida de duração a utilizar a designada Duração de Fisher-Weil. Assim, a compra de uma obrigação TRM permite imunizar num horizonte temporal coincidente com a duração (3.5 anos), independentemente das flutuações das taxas de juro, um valor igual a:

$$\mathrm{EUR}113.62 \times [1 + \mathrm{r}(0{,}3.5)]^{3.5} = \mathrm{EUR}113.62 \times 1.065^{3.5} = \mathrm{EUR}141.64.$$

b)

A compra hoje de uma obrigação cupão zero permite imunizar um valor de EUR100 (*cash flow* pago no final) num horizonte temporal de 4 anos (a duração de uma obrigação de cupão zero é igual à respectiva maturidade, pois paga um único *cash flow* no final). O preço actual desta obrigação deverá ser igual a:

$$\mathrm{B}_0 = \frac{\mathrm{EUR}100}{1.065^4} = \mathrm{EUR}77.73.$$

c)

As situações das alíneas a) e b) apesar de semelhantes - imunizar um determinado valor num momento específico - tem algumas difrenças. No caso da obrigação de cupão zero existe a certeza que dentro de 4 anos o valor do investimento será EUR100, enquanto no caso da obrigação com cupão existem algumas limitações ao processo de imunização:

- a duração de Fisher-Weil (e de Macaulay) apenas são consistentes com um processo de evolução de taxas de juro, no qual uma curva de taxas de juro (não obrigatoriamente horizontal) movimenta-se aleatoriamente, mas, sendo as variações proporcionais do factor de desconto (a taxa de juro mais a unidade) idênticas para todas as maturidades. Estes movimentos designam-se de choques multiplicativos sobre a curva de taxas de juro. As taxas de juro futuras resultarão das taxas *forward* definidas pela estrutura inicial e dos choques multiplicativos (definido por λ) sobre essa mesma estrutura. Portanto, existe um risco de realizar uma taxa de rendibilidade menor (e um valor futuro) decorrente de uma incorrecta identificação do processo estocástico (risco de processo estocástico). No entanto, as medidas de duração mais sofisticadas (processo log-multiplicativo, imunização multi-factor) nos testes efectuados não permitiram obter melhores performances que a duração de Macaulay e Fisher-Weil. O risco de processo estocástico pode ser reduzido escolhendo obrigações com duração o mais próximo possível do horizonte temporal (carteira *bullet*).

- o processo de imunização vai perdendo eficácia com o decorrer do tempo, mesmo que a curva de taxas de juro não se altere, pois a duração não evolui linearmente com o horizonte temporal (h). A duração decresce mais lentamente, o que obriga a um reajustamento contínuo da carteira por forma a garantir a condição de imunização (D = h); na prática este reajustamento é periódico pois existem custos de transação.

Por exemplo, consideremos que a curva de taxas *spot* no final do ano 3.5 é horizontal e igual a 5% para todas as maturidades (variação não proporcional do factor de desconto) e que todos os cupões intermédios foram reinvestidos também à taxa de 4%. O valor da carteira (VF) composta por uma obrigação TRM, no final do ano 3.5, será igual a:

$$\text{VF} = 10.2 \times 1.05^{2.5} + 10.2 \times 1.05^{1.5} + 10.2 \times 1.05^{0.5} + \frac{110.2}{1.05^{0.5}} = 140.49$$

A taxa de rendibilidade (TRR) será igual a:

$$\text{TRR} = \sqrt[3.5]{\frac{140.49}{113.62}} - 1 = 6.25\%$$

O valor da carteira e a taxa de rendibilidade foram inferiores aos que obteríamos num cenário de não alteração da curva de taxas de juro, logo, a imunização não foi eficiente. Esta ineficiência resultou de o choque sobre a curva de taxas de juro não ter seguido o processo estocástico implícito na duração de Fisher-Weil.

Caso 2.15

O Fundo de Pensões VIDATOTAL deseja garantir um valor para a sua carteira de obrigações (rating AA) não inferior a 1 milhão de euros dentro de 1.5 anos. Para o efeito considere as informações constantes dos anexos. Pretende-se que:

a) Determine o valor do investimento inicial para garantir aquela condição.

b) Seleccione uma carteira imunizada para aquele horizonte temporal, não se esquecendo de maximizar o VAL (diferença entre os preços de equilíbrio e de mercado das obrigações).

c) Decorrido um ano, e no pressuposto de que a curva de taxas de juro sofreu um choque multiplicativo de mais 1 ponto percentual (vide anexo 2), volte a imunizar a carteira.

d) Calcule o valor esperado da carteira no final do ano 1.5 e respectiva taxa de rendibilidade durante o horizonte temporal.

e) Reformule as alíneas anteriores, utilizando uma estratégia de imunização contingente, sendo a margem de segurança de 1.5 pontos percentuais e sendo a previsão do gestor da carteira para a taxa dos Bilhetes do Tesouro com prazo de 6 meses a seguinte:

Anos (t)	**0.5**	**1**	**1.5**
Taxas forward - f(t,t+0.5)	4.25%	2.75%	3.75%

Nota: o prémio de risco para rating AA é de 0.25 pontos percentuais

Anexo 1

1. Curva de taxas de juro (rating AA)

Anos (t)	0.5	1	1.5	2	3	4
Taxas spot - r(0,t)	5.000%	5.000%	4.500%	4.500%	4.000%	4.000%
Taxas forward - f(0,1,t)			3.507%	4.002%	3.504%	3.669%
Taxas forward - f(0,2,t)					3.007%	3.502%
Taxas forward - f(0,3,t)						4.000%

2. Obrigações

Anos	0	0.5	1	1.5	2	3	4
Obrigação A - Taxa fixa							
Cash Flows			6%		6%	6%	106%
Valor	107.15%		106.51%		104.77%	101.92%	
Duração (anos)	3.69		2.84		1.94	1.00	
Cotação	107.05%						
Obrigação B - Taxa fixa							
Cash Flows		2%	2%	102%			
Valor	99.34%		100.26%				
Duração (anos)	1.47		0.50				
Cotação	99.49%						
Obrigação C - Cap. automática							
Cash Flows			127.63%				
Valor	121.55%						
Duração (anos)	1						
Cotação	121.50%						

Anexo 2 - Final do ano 1

1. Curva de taxas de juro (rating AA)

Anos (t)	0.5	1	1.5	2	3
Taxas spot - r(0,t)	4.542%	5.042%		4.539%	4.705%
Taxas forward - f(0,1,t)				4.037%	4.537%
Taxas forward - f(0,2,t)					5.040%

2. Obrigações

Anos	0	0.5	1	1.5	2	3
Obrigação A - Taxa fixa						
Cash Flows			6%		6%	106%
Valor	103.54%		102.77%		100.91%	
Duração (anos)	2.84		1.94		1.00	
Cotação						
Obrigação B - Taxa fixa						
Cash Flows		102%				
Valor	99.76%					
Duração (anos)	0.50					
Cotação						

Solução

a)

O objectivo é constituir uma carteira de obrigações para garantir um valor futuro no ano 1.5 de EUR1,000,000.

Através da imunização convencional garantimos um valor futuro para a carteira igual ao que obteríamos num cenário de estabilidade das taxas de juro, ou seja, a taxa de rendibilidade da carteira durante o horizonte temporal de investimento (h=1.5 anos) será igual à actual taxa *spot* para o prazo de 1.5 anos. Assim, o valor do investimento inicial (INVo) terá que ser igual a:

$$\mathrm{INVo} = \frac{1{,}000{,}000}{[1 + r(0{,}1.5)]^{1{,}5}} = \frac{1{,}000{,}000}{1.045^{1{,}5}} = \mathrm{EUR}936{,}107.15.$$

b)

A carteira de obrigações a constituir tem que respeitar a condição de imunização convencional: $h = D^c$.

Temos que constituir uma carteira com duração (D^c) igual a 1.5 anos e, simultaneamente, maximizando o VAL. As composições de carteira possíveis são as seguintes:

- A ; B
- A ; C
- A ; B ;C

No Anexo 1 verifica-se que as obrigações A e C têm VAL positivo enquanto a obrigação B tem VAL negativo (cotação superior ao valor de equilíbrio). Assim, a carteira será constituída pelas obrigações A (título 1) e C (título 2).

Determinação da composição da carteira, via equação (2.13):

$$D_p = X_1 \cdot D_1 + X_2 \cdot D_2 \Leftrightarrow 1.5 = X_1 \cdot 3.69 + X_2 \cdot 1 \Leftrightarrow 1.5 = X_1 \cdot 3.69 + (1 - X_1) \cdot 1$$
$$\Rightarrow X_1 = 0.1859 \quad \wedge \quad X_2 = 1 - X_1 = 1 - 0.1859 = 0.8141$$

Título	Peso	Valor a investir	Valor Nominal adquirido(*)
A	0.1859	174,022.32	EUR162,561
C	0.8141	762,084.83	EUR627,230
		936,107.15	

(*) investimento a efectuar dividido pelo valor de transacção, arredondado por defeito.

c)

Decorrido um ano a curva de taxas de juro sofreu um choque multiplicativo de 0.01. As novas taxas spot (rating AA) resultam das taxas *forward* implícitas na estrutura inicial e do choque aleatório.

Temos que proceder ao reajustamento da carteira para manter a condição de imunização ($h = D^c$ anos). Assim, a carteira será integralmente composta por obrigações B, sendo necessário vender a totalidade das obrigações A e C e investir, o valor resultante da venda e os *cash flows* recebidos, em obrigações B.

Valor da carteira (final ano 1):

Cash flows recebidos	A	6% x EUR162,561	EUR9,753.66
	C	127.63% x EUR627,230	EUR800,533.65
Valor venda	A	103.54% x EUR162,561	EUR168,315.66
		Total	EUR978,602.97

O valor nominal de obrigações B a adquirir será igual a: EUR978,602.97 / 99.76% = EUR980,957.27

d)

Valor da carteira (final ano 1.5):

Cash flows recebidos: 102% x EUR980,957.27 = EUR1,000,576.41

Conseguimos garantir um valor de aproximadamente EUR1,000,000 no final do ano 1.5, sendo a taxa de rendibilidade (TRR) obtida aproximadamente igual à taxa de juro *spot* a 1.5 anos em vigor no momento 0:

$$TRR = \sqrt[1,5]{\frac{1,000,576.41}{936,107.15}} - 1 \cong 4.54\%$$

e)

A imunização contingente consiste numa combinação de uma estratégia activa com imunização convencional. Este tipo de imunização permite, caso a previsão do gestor se concretize relativamente às taxas de juro, obter um valor futuro da carteira superior ao que seria obtido através da imunização convencional (logo, uma taxa de rendibilidade mais alta) mas estando a assumir risco. Se a previsão não se confirmar o valor futuro da carteira e a taxa de rendibilidade, serão inferiores ao obtido na imunização convencional, embora com um mínimo que é estabelecido à partida (taxa de rendibilidade mínima fixada).

Na imunização contingente deixa-se em aberto a possibilidade de ganho e limita-se a perda à margem de segurança que é fixada pelo gestor da carteira, sendo esta definida do seguinte modo:

- taxa de rendibilidade através de imunização convencional: ro = 4.5%

- taxa de rendibilidade mínima fixada pelo gestor: TRRmin = 3%
- margem de segurança: m = 4.5 – 1.5 = 3%

O processo de imunização contingente engloba os seguintes passos:

- constituição da carteira inicial com base numa estratégia activa resultante da comparação entre a previsão do gestor e a do mercado para as taxas de juro futuras:

  Gestor prevê <u>taxas mais altas</u> => Carteira curta $D^c < h$
  Gestor prevê <u>taxas mais baixas</u> => Carteira longa $D^c > h$

- reavaliação periódica da estratégia activa a partir do cálculo da taxa de rendibilidade potencial da carteira no final do horizonte temporal (TRR*):

  Se TRR* > TRRmin => estratégia activa (utilizando a regra de decisão anterior)
  Se TRR* $\leq$ TRRmin => imunização convencional (garantindo TRRmin)

No primeiro passo vamos comparar a previsão de taxas de juro do gestor com a do mercado. Para o efeito, vamos calcular a estrutura de taxas *forward* resultante das taxas *spot* iniciais para os títulos do Tesouro:

Taxas forward f(0,t,t+0.5)

Anos (t)	**0.5**	**1**	**1.5**
Mercado	5%	3.507%	4.5%
Gestor	4.5%	3%	4%

O gestor da carteira prevê taxas mais baixas do que o mercado prevê. Deste modo, iremos constituir uma carteira longa ($D^c > h$). Temos que definir uma carteira com duração superior a 1.5 anos (quanto mais afastada a duração estiver do horizonte temporal maior será o grau de exposição ao risco de taxa de juro).

As composições possíveis de carteira são as seguintes:

- A
- A ; C
- A ; B
- A ; B ;C

Na alinea b) verificámos que as obrigações A e C tinham VAL positivo (sendo o de A maior) enquanto a obrigação B tinha VAL negativo (cotação superior ao valor de equilíbrio). Assim, a carteira será composta apenas pela obrigação A, sendo duração da carteira igual à da obrigação A (3.69 anos).

INVo = EUR936,107.15

Valor nominal a adquirir = EUR936,107.15 / 107.05% $\cong$ EUR874,457.00

Decorrido 1 ano:

- Valor da carteira (final ano 1):

Cash flows recebidos	A	6% x EUR874,457.00	EUR52,467.42
Valor venda	A	103.54% x EUR874,457	EUR905,412.78
		Total	EUR957,880.20

- Reavaliação da estratégia

Temos que calcular a taxa de rendibilidade potencial (TRR*) no final do horizonte temporal, admitindo imunização convencional no tempo remanescente (h = 0.5 anos), ou seja, uma rendibilidade para o próximo semestre igual à nova taxa *spot* (4.542%).

$$TRR^* = \sqrt[1,5]{\frac{957{,}880.20 \times [1 + 4.542\%]^{0,5}}{936{,}107.15}} - 1 \cong 3.06\%$$

Sendo: $TRR^* \approx TRR_{\min}$

Então: passamos para imunização convencional para garantirmos a rendibilidade mínima (3%).

A duração da carteira deverá ser igual ao horizonte temporal remanescente (h=0.5) para garantirmos a rendibilidade mínima. A perda resultou de a previsão do gestor não se ter concretizado. A carteira será inteiramente composta por obrigações B que têm duração igual a 0.5 anos, tendo que proceder-se à venda das obrigações A.

Valor nominal de obrigações B a adquirir = EUR957,880.20 / 99.76% = EUR960,184.64

Decorrido 1,5 anos

Valor da carteira (final ano 1.5):

Cash flows recebidos: 102% x EUR960,184.64 = EUR979,388.34

A taxa de rendibilidade (TRR) é igual à rendibilidade mínima:

$$r = \sqrt[1,5]{\frac{979{,}388.34}{936{,}107.15}} - 1 \cong 3.06\%$$

Caso 2.16

A empresa SOMA contraiu há 2 anos um empréstimo nas seguintes condições:

Montante: EUR1,000,000;
Taxa de juro: 5% (juros pagos anualmente);
Reembolso: 20% (3º ano); 30% (4º ano) e 50% (5º ano).

A empresa tem actualmente uma situação de tesouraria que lhe possibilita o reembolso antecipado do empréstimo. No entanto, dadas as claúsulas contratuais do empréstimo não é possível proceder ao seu reembolso antecipadamente. Assim, a empresa decidiu constituir uma carteira de obrigações (ver quadros em anexo) para cobrir o serviço da dívida integralmente.

Pretende-se que:

a) Determine o valor do investimento inicial.

b) Constitua uma carteira de obrigações por forma a atingir o objectivo pretendido.

c) Proceda ao reajustamento da carteira no final do ano 1 e 2, considerando que se confirmaram as expectativas do mercado.

d) Verifique se no final do ano 3 consegue cobrir o serviço da dívida, continuando a admitir que se verificaram as previsões do mercado. Determine a taxa de rendibilidade da carteira durante horizonte temporal.

Anexo

1. Curva de taxas de juro (rating AA)

Anos (t)	0.5	1	1.5	2	3
Taxas spot - r(0,t)	5.000%	5.000%	4.500%	4.500%	4.000%
Taxas forward - f(0,1,t)			3.507%	4.002%	3.504%
Taxas forward - f(0,2,t)					3.007%

2. Obrigações

Anos	0	0.5	1	1.5	2	3
Obrigação A - Taxa fixa						
Cash Flows			56%		53%	
Valor	101.87%		50.96%			
Duração (anos)	1.48		1.00			
Cotação	101.97%					
Obrigação B - Cupão Zero						
Cash Flows						100%
Valor	88.90%		93.34%		97.08%	
Duração (anos)	3.00					
Cotação	88.85%					
Obrigação C - Cap. automática						
Cash Flows			127.63%			
Valor	121.55%					
Duração (anos)	1					
Cotação	121.50%					

Solução

a)

Para podermos calcular o investimento inicial temos que, previamente, construir o mapa de serviço da dívida.

	Ano 1	Ano 2	Ano 3
Reembolso	200,000	300,000	500,000
Juros	50,000	40,000	25,000
Prestação	250,000	340,000	525,000

O valor do investimento inicial (INVo) na carteira de obrigações (valor actual dos activos - VA) terá que ser igual ao valor actual do passivo (VL) que pretendemos imunizar. Para o efeito vamos utilizar a curva de taxas *spot* actual.

$$INV_0 = VL = \frac{250,000}{1.05^1} + \frac{340,000}{1.045^2} + \frac{525,000}{1.04^3} \cong 1,016,166.51.$$

b)

Estamos perante um problema de imunização multi-período, visto que, o passivo engloba mais do que uma responsabilidade futura. Para que o balanço da empresa SOMA esteja imunizado face a variações das taxas de juro, partindo-se de uma situação de *matching* perfeito (VA = VL) são necessárias duas condições:

1. Duração dos activos igual à duração dos passivos (DA = DL)

$$DA = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{[1+r(o,t)]^t} \times t}{VA} \qquad DL = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{[1+r(o,t)]^t} \times t}{VL}$$

2. Dispersão do valor dos activos deve ser maior do que a dispersão do valor dos passivos (IA > IL)

$$IA = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{[1+r(o,t)]^t} \times (t-DA)^2}{VA} \qquad IL = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{[1+r(o,t)]^t} \times (t-DL)^2}{VL}$$

A segunda condição relativa à imunização multi-período (IA > IL) resulta da duração de Macaulay e Fisher-Weil não respeitarem as condições de equilíbrio dos mercados financeiros competitivos (inexistência de oportunidades de arbitragem), pois, os investidores podem realizar um ganho passando de obrigações com cupão baixo para obrigações com cupão mais alto e idêntica duração.

Este ganho deriva de uma maior convexidade das obrigações com maior cupão (para uma mesma duração quanto maior a taxa do cupão maior a convexidade).

No entanto, existe uma regra prática bastante mais simples que garante o respeito da segunda condição, que se baseia na divisão da carteira de activos em duas sub-carteiras, tais que:

1. uma das subcarteiras tenha duração não superior à data de vencimento da 1ª responsabilidade;

2. a outra sub-carteira tenha duração não inferior à data de vencimento da última responsabilidade.

Cálculo da duração do passivo (DL):

t	CF_t	Factor Actualização	VA CF_t	VA CF_t x t
1	250,000	0.95238	238,095	238,095
2	340,000	0.91573	311,348	622,696
3	525,000	0.88900	466,723	1,400,169
			1,016,167	2,260,961

$$DL = \frac{2{,}260{,}961}{1{,}016{,}167} = 2.22 \text{ anos}$$

Temos que constituir uma carteira de obrigações com duração (DA) igual a 2.22 anos e que, simultaneamente, respeite as regras relativas à segunda condição. As composições de carteiras possíveis são as seguintes:

- A ; B
- B ; C

As duas carteiras indicadas permitem constituir obter uma duração igual à pretendida. No entanto, apenas a carteira composta por B (título 1) e C (título 2) respeita a regra que atrás indicamos: tem um título (C) com duração não superior à maturidade da 1ª responsabilidade e um título (B) com duração não inferior à maturidade da última responsabilidade.

Determinação da composição da carteira:

$$D_p = X_1 \cdot D_1 + X_2 \cdot D_2 \Leftrightarrow 2.22 = X_1 \cdot 3 + X_2 \cdot 1 \Leftrightarrow 2.22 = X_1 \cdot 3 + (1 - X_1) \cdot 1$$

$$X_1 = 0.61 \qquad X_2 = 1 - X_1 = 1 - 0.61 = 0.39$$

Título	Peso	Investimento	VT	Valor nominal
B	61%	619,862	88.85%	697,652
C	39%	396,305	121.50%	326,175
		1,016,166.51		

c)

- <u>Final Ano 1</u>

Valor da carteira:

Cash flows recebidos	C	127.63% x EUR326,175	EUR416,297.15
Valor de venda	B	93.34% x EUR697,652	EUR651,188.38
Serviço da Dívida			(EUR250 000)
		Fundos disponíveis	EUR817,485.53

Duração do passivo (DL):

t	CF_t	Factor Actualização	VA CF_t	VA CF_t x t
1	340,000	0.96152	326,916	326,916
2	525,000	0.93345	490,059	980,118
			816,975	1,307,034

$$DL = \frac{1{,}307{,}034}{816{,}975} = 1.60 \text{ anos}$$

Temos que proceder ao reajustamento da carteira com as obrigações B (título 1) e A (título 2) para uma duração de 1.60 anos e garantindo o respeito da segunda condição (A tem duração não superior a 1 e B tem duração não inferior a 2).

Determinação da nova composição da carteira:

$$D_p = X_1 \cdot D_1 + X_2 \cdot D_2 \Leftrightarrow 1.60 = X_1 \cdot 2 + X_2 \cdot 1 \Leftrightarrow 1.60 = X_1 \cdot 2 + (1 - X_1) \cdot 1$$

$$X_1 = 0.60 \qquad X_2 = 1 - X_1 = 1 - 0.60 = 0.40$$

Título	Peso	Investimento	VT	Valor nominal
B	60%	490,491	93.34%	525,462
A	40%	326,994	50.96%	641,663
		817,485.53		

No final do ano 1 temos que efectuar a venda de obrigações B com um valor nominal de EUR172,190 e comprar obrigações A com um valor nominal de EUR641,663.

- <u>Final Ano 2</u>

Valor da carteira:

Cash flows recebidos	A	53% x EUR641,663	EUR340,081.39
Valor de venda	B	97.08% x EUR525,462	EUR510,118.51
Serviço da Dívida			(EUR340,000)
		Fundos disponíveis	EUR510,199.90

A duração do passivo no final do ano é de apenas 1 ano, pois falta um único *cash flow*. A duração do activo terá que ser igual a 1 ano. A carteira deverá ser composta integralmente por obrigações B.

Valor nominal de obrigações B a deter em carteira: EUR510,199.90 / 97.08% = EUR525,545.84.

d)

- Final Ano 3

Valor da carteira:

Cash flows recebidos	B	100% x EUR525,545.84	EUR525,545.84
Serviço da Dívida			(EUR525,000)
		Fundos disponíveis	EUR545.84

O valor da carteira no final do ano 3 é suficiente para cumprir o serviço da dívida desse ano, verificando-se um diferencial favorável à empresa de pequeno valor (EUR545.84).

A taxa de rendibilidade da carteira é dada pela seguinte expressão:

$$-1{,}016{,}166.51+\frac{250,000}{(1+\text{TRR})}+\frac{340,000}{(1+\text{TRR})^2}+\frac{525,545.84}{(1+\text{TRR})^3}=0 \Leftrightarrow \text{TRR}\cong 4.266\%$$

Caso 2.17

Considere ter estimado, hoje, as seguintes taxas de juro *spot* sem risco:

Prazos:	1 ano	2 anos	3 anos	4 anos	5 anos
Taxas:	4.0%	4.4%	4.8%	5.0%	5.3%

Nota: taxas efectivas anuais (base actual / actual).

Admita ainda estar somente interessado em transaccionar as obrigações do Tesouro descritas no quadro seguinte, com um cupão anual e cotadas em percentagem do par:

	Taxa de cupão	**Maturidade**	**Valor de transacção**	**Valor de equilíbrio(1)**	**Duration**	**Convexidade**
OT-A	8%	2 anos	106.78%	106.78%	1.93 anos	5.71
OT-B	3.5%	3 anos	96.50%	96.50%	2.90 anos	11.45
OT-C	5%	1 ano	100.96%	100.96%	1 ano	2
OT-D	4%	4 anos	96.55%	96.55%	3.77 anos	18.46

(1) Soma actualizada dos *cash flows* futuros.

Pretende-se que:

a) Admita possuir actualmente uma carteira composta por OT-A, com um valor nominal de EUR900,000, e por OT-D, com um valor nominal de EUR400,000. Tal carteira foi constituída há 1 ano atrás por forma a cobrir uma responsabilidade vencível daqui a 1 ano e no valor de EUR1,500,000. A taxa *spot* sem risco a 2 anos era, há um ano atrás, de 4.1%. Reajuste a composição da carteira de OT's mediante uma estratégia de imunização convencional que minimize o "risco de processo estocástico".

b) Reformule a solução da alínea anterior mediante a implementação de uma estratégia de imunização activa baseada numa expectativa de descida das taxas de juro e que maximize a convexidade da carteira.

c) Reformule a alínea b) através de uma estratégia de imunização contingente baseada em idêntica expectativa de evolução das taxas de juro e numa margem de segurança de 0.25%.

d) Imunize duas responsabilidades no valor de EUR1,000,000 e EUR100,000 e vencíveis daqui a 3 e 5 anos, respectivamente. Para o efeito, procure maximizar a convexidade da carteira de obrigações a constituir.

Solução

a)

Valor actual da carteira:

OT – A: EUR900,000 x (8% + 106.78%)
OT – D: <u>EUR400,000 x (4% + 96.55%)</u>
EUR1,435,220.00

A estratégia de imunização convencional (ou clássica) é implementada assegurando que a duração (de *Fisher-Weil*) da carteira é igual ao tempo em falta para o vencimento da responsabilidade, ou seja, $DFW^C = h = 1\,\text{ano}$.

De entre as várias combinações possíveis, aquela que minimiza o risco de taxa de juro consiste em investir a 100% numa obrigação sem *cash flows* intermédios (a OT-C). Tal significa adquirir o seguinte valor nominal de OT-C:

$$x_c = 100\% \Rightarrow VN(C) = \frac{EUR1,435,220}{100.96\%} = EUR\,1,421,572.90 \cong EUR1,421,572.$$ [14]

b)

[14] O arredondamento é efectuado para a unidade inferior visto não ser possível dispender mais do que o valor de mercado da carteira.

Face a uma expectativa de descida de taxas de juro, para que o *efeito preço* (positivo) suplante o *efeito reinvestimento* (negativo), há que definir uma *duration* superior ao horizonte temporal de investimento: $DFW^{C} > 1\,\text{ano}$.

De forma a maximizar a aposta em tal expectativa, dever-se-á investir a 100% na obrigação com maior *duration*: a OT-D, a qual maximiza também a convexidade da carteira (visto ser o título com maior convexidade). Tal investimento traduz-se na aquisição do seguinte valor nominal da OT-D:

$$x_D = 100\% \Rightarrow VN(D) = \frac{EUR1{,}435{,}220}{96.55\%} = EUR\,1{,}486{,}504.40 \cong EUR1{,}486{,}504.$$

c)

Em primeiro lugar, há que determinar a taxa de rentabilidade potencial associada à conversão imediata da estratégia activa para imunização clássica: TRR* = ?

$\frac{EUR1.5\,M}{(1+4.1\%)^2} \cong EUR1{,}384{,}171$	EUR1,435,220	$\xrightarrow{4\%}$ (IM Clássica)	EUR1,492,628.8
0	1		2

TRR* : EUR1,384,171 x (1 + TRR*)² = EUR1,492,628.8

$$\Leftrightarrow TRR^{*} = \sqrt{\frac{EUR1{,}492{,}628.8}{EUR1{,}384{,}171}} - 1 \cong 3.8439\%$$

$$TRR_{min} = 4.1\% - 0.25\% = 3.85\%$$

$$TRR^{*} \langle\, TRR_{min} \Rightarrow IM.\,\text{Clássica}$$

$$\Rightarrow \text{Solução a)}: x_c = 100\%;\ VN(C) = EUR1{,}421{,}572.$$

d)

Duas (das três) condições de imunização são (vide equações (2.21) e (2.22)):

$$VA = VL = \frac{EUR1{,}000{,}000}{(1+4.8\%)^3} + \frac{EUR100{,}000}{(1+5.3\%)^5} \cong EUR946{,}035.50$$

$$DA = DL = \frac{3\times\frac{EUR1{,}000{,}000}{(1.048)^3} + 5\times\frac{EUR100{,}000}{(1.053)^5}}{EUR946{,}035.50} \cong 3.1633\,\text{anos}$$

Para obedecer aos dois requesitos anteriores, constituem combinações possíveis quaisquer carteiras de obrigações que envolvam a OT-D. Todavia, nenhuma das combinações obedece à regra de *Bierwag*.

Consequentemente, é ainda necessário impor que (equação (2.23)):

$$IA \geq IL = \frac{(3-3.1633)^2\times\frac{EUR1{,}000{,}000}{(1.048)^3} + (5-3.1633)^2\times\frac{EUR100{,}000}{(1.053)^5}}{EUR946{,}035.50} \cong 0.3$$

De forma a obedecer ao requesito anterior e por forma a maximizar a convexidade da carteira, dever-se-á constituir uma combinação entre as obrigações OT-B e OT-D, com pesos relativos x_B e x_D:

$$\begin{cases} 2.9\,x_B + 3.77\,x_D = 3.1633 \\ x_B + x_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B \cong 69.736\% \\ x_D \cong 30.264\% \end{cases}$$

Obrigação	%	Investimento		VN
B	69.736%	EUR 659,727.32	÷ 96.50%	EUR 636,636.86
D	30.264%	EUR 286,308.18	÷ 96.55%	EUR 296,538.77
		EUR 946,035.50		

A carteira definida no quadro anterior obedece aos dois primeiros requesitos de imunização multiperíodo. Falta ainda verificar se IA ≥ 0.3:

$$\begin{aligned} IA = \frac{1}{946{,}035.50}\Bigg[&(1-3.1633)^2\times\frac{3.5\%\times 636{,}636.86+4\%\times 296{,}538.77}{1.04} \\ &+(2-3.1633)^2\times\frac{3.5\%\times 636{,}636.86+4\%\times 296{,}538.77}{(1.044)^2} \\ &+(3-3.1633)^2\times\frac{1.035\%\times 636{,}636.86+4\%\times 296{,}538.77}{(1.048)^3} \\ &+(4-3.1633)^2\times\frac{104\%\times 296.538.77}{(1.05)^4}\Bigg] \\ &\cong 0.41 > 0.3. \end{aligned}$$