ISCTE – Licenciatura de Finanças
***Investimentos* 2003-2004 – Exame 1ª Época**
Resolução
12/07/2004 **Duração: 3h**

CASO 1

a) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: "A duração de uma *floating rate note* é tanto maior quanto maior for o prazo associado ao indexante que define a taxa de cupão".

Afirmação verdadeira.

Desprezando diferenciais de credit spreads, a duração de uma obrigação a taxa variável corresponde ao tempo em falta para o vencimento do próximo cupão.

Ora, a periodicidade do cupão está normalmente associada ao prazo do indexante (por exemplo, temos cupão trimestral se o indexante for a Euribor a 3 meses).

b) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: "Considerando que a taxa de juro sem risco *bid* é inferior à taxa de juro sem risco *offer*, então deixa de existir uma única carteira eficiente de activos com risco".

Afirmação verdadeira.

Passam a existir 2 carteiras de tangencia:

i) Uma para combinar com aplicações financeiras sem risco e dada pelo ponto de tangencia entre a semi-recta com origem no ponto rf(bid) e a fronteira eficiente de Markowitz;
ii) Outra para combinar com financiamentos e dada pelo ponto de tangencia entre a semi-recta com origem no ponto rf(ask) e a fronteira eficiente de Markowitz.

c) Admita ter de pagar, daqui a 1 ano, EUR100,000 vezes a Euribor a 6 meses em vigor daqui a 0.5 anos. Defina as operações financeiras a efectuar hoje de forma a garantir o pagamento de tal responsabilidade.

Operações a efectuar hoje:

i) Efectuar uma aplicação financeira a 6 meses no valor de EUR100,000xP(0,0.5), onde P(0,t) designa o factor de desconto (interbancário) a "t" anos. Daqui a 6 meses, tal aplicação irá ser renovada por mais 6 meses, gerando no ano 1 um recebimento igual a $\text{EUR}100{,}000 \times \left[1 + \frac{E_{6M}(0.5y)}{2}\right]$;

ii) Contrair um financiamento a 1 ano no valor de EUR100,000xP(0,1). Daqui a um ano, ocorrerá um pagamento no valor de EUR100,000. Tal pagamento conjugado com o recebimento proveniente da aplicação anterior gera exactamente o valor da responsabilidade a liquidar, ou seja, $\text{EUR}100{,}000 \times \frac{E_{6M}(0.5y)}{2}$.

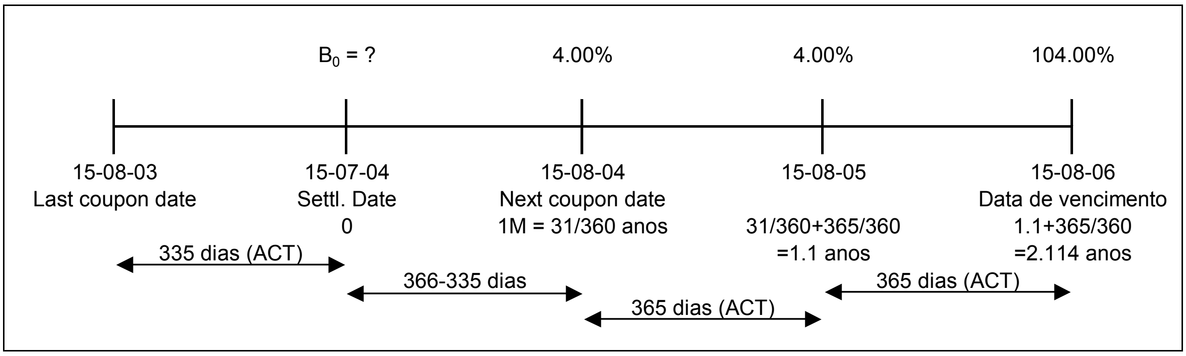
d) Demonstre que o *beta* de uma carteira de acções é igual à média ponderada dos *betas* associadas às acções componentes.

$$
\begin{aligned}
\beta_p &= \frac{COV(r_p, r_M)}{\sigma_M^2} \\
&= \frac{1}{\sigma_M^2} COV\left(\sum_{i=1}^{n} r_i w_i, r_M\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_M^2} \sum_{i=1}^{n} w_i COV(r_i, r_M) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i
\end{aligned}
$$

CASO 2

a)

Settlement date = 12/07/04 + 3 dias de calendário = 15/07/04.



Portanto,

$$
B_0 = \frac{4\%}{\left[1 + (2.25\% - 0.15\%) \times \frac{31}{360}\right]} + \frac{4\%}{[1 + r(0{,}1.1)]^{1.1}} + \frac{104\%}{[1 + r(0{,}2.114)]^{2.114}}.
$$

As taxa *spot* sem risco em falta podem ser obtidas via interpolação linear:

$$r(0,1.1) \approx 2.9\% + (3.2\% - 2.9\%) \times \frac{1.1-1}{2-1} - 0.15\% \cong 2.78\%; \text{ e}$$

$$r(0,2.114) \approx 3.2\% + (4\% - 3.2\%) \times \frac{2.114-2}{3-2} - 0.15\% \cong 3.141\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{4\%}{\left[1 + (2.25\% - 0.15\%) \times \frac{31}{360}\right]} + \frac{4\%}{[1+2.78\%]^{1.1}} + \frac{104\%}{[1+3.141\%]^{2.114}} \cong 105.29\%.$$

$$AI = 4\% \times \frac{335}{366} \cong 3.66\%.$$

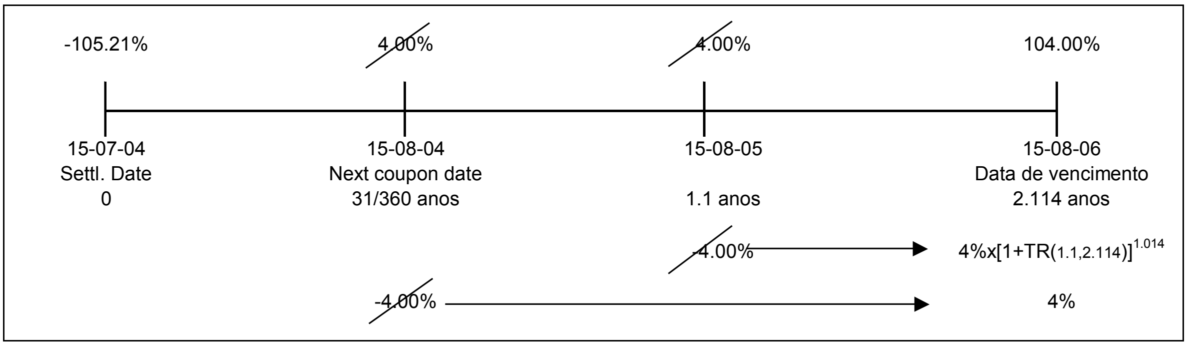
Decisão de *trading*:

$$VT_0^{bid} = 101.50\% + 3.66\% = 105.16\% < B_0 \Rightarrow \text{ Não vender;}$$

$$VT_0^{ask} = 101.55\% + 3.66\% = 105.21\% < B_0 \Rightarrow \text{ Comprar.}$$

b)

O diagrama seguinte resume a operação de investimento em análise:



A questão reside em encontrar o valor da taxa de reinvestimento do penúltimo *cash flow* tal que a TRR seja igual a 3.14%.

Portanto, TR(1.1,2.114): TRR=3.14%, i.e.

$$105.21\% \times (1+3.14\%)^{2.114} = 104\% + 4\% \times [1+TR(1.1,2.114)]^{1.014} + 4\% \Rightarrow TR(1.1,2.114) \cong 7.79\%.$$

Só será possível atingir uma taxa de rentabilidade igual a 3.14% no cenário, implausível, de reinvestimento do penúltimo cupão a uma taxa igual a 7.79%.

c)

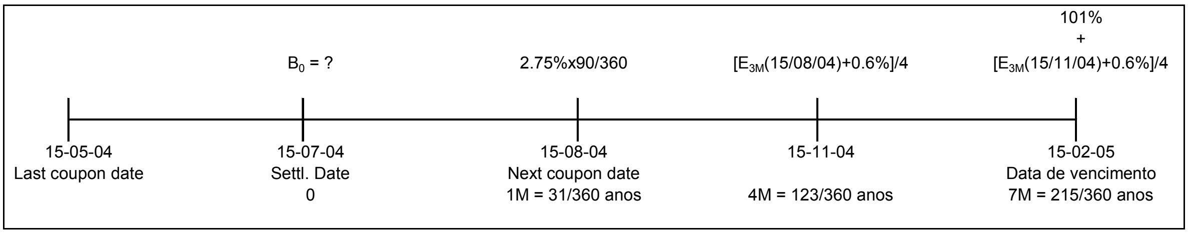
Pretende-se calcular a taxa *forward* interbancária de 4M a 7M, f(0,4M,7M), ou seja,

$$f(0{,}4M{,}7M):\quad 1+2.75\%\times\frac{215}{360}=\left(1+2.5\%\times\frac{123}{360}\right)\times\left[1+f(0{,}4M{,}7M)\times\frac{215-123}{360}\right]$$

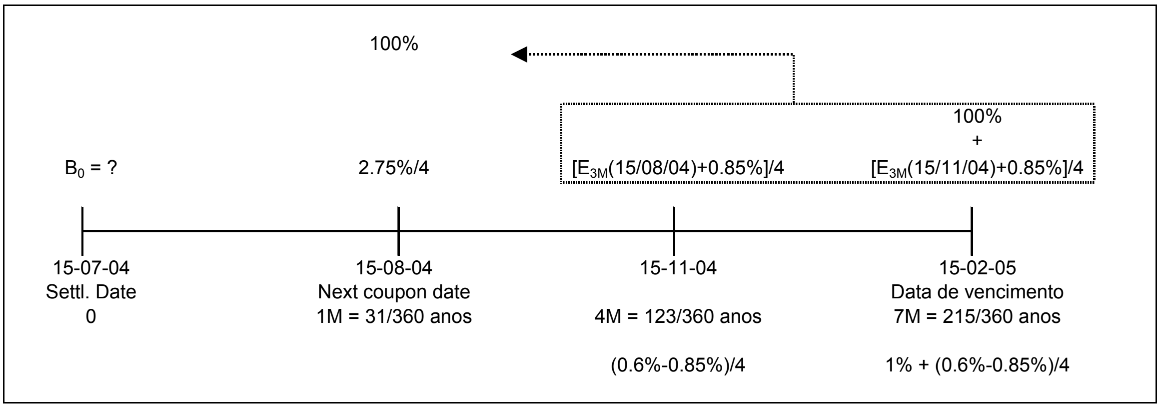
$$\Rightarrow f(0{,}4M{,}7M)\cong 3.058\%.$$

d)

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



Credit spread BB+ – Mercado monetário = 1% - 0.15% = 0.85%.

Portanto,

$$B_0 = \frac{100\% + \frac{2.75\%}{4}}{1 + (2.25\% + 0.85\%) \times \frac{31}{360}}$$

$$+ \frac{\frac{0.6\% - 0.85\%}{4}}{1 + (2.5\% + 0.85\%) \times \frac{123}{360}} + \frac{\frac{0.6\% - 0.85\%}{4}}{1 + (2.75\% + 0.85\%) \times \frac{215}{360}}$$

$$= 101.28\%.$$

e)

$$\text{DFW} = \frac{\frac{31}{360} \times \frac{100\% + \frac{2.75\%}{4}}{1 + (2.25\% + 0.85\%) \times \frac{31}{360}} + \frac{123}{360} \times \frac{\frac{0.6\% - 0.85\%}{4}}{1 + (2.5\% + 0.85\%) \times \frac{123}{360}} + \frac{215}{360} \times \frac{\frac{0.6\% - 0.85\%}{4}}{1 + (2.75\% + 0.85\%) \times \frac{215}{360}}}{101.28\%}$$

$$= 0.085\text{y}.$$

CASO 3

a)

$$\mathrm{E}(\mathrm{r_p}) = 10\% \times 0.3 + 15\% \times 0.5 + 25\% \times 0.2 \cong 15.5\%.$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (0.3)^2 \times (0.2)^2 + (0.5)^2 \times (0.25)^2 + (0.2)^2 \times (0.35)^2 \\ &\quad + 2 \times 0.3 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.6 + 2 \times 0.3 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.35 \times 0.1 \\ &\quad + 2 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.25 \times 0.35 \times 0.3 \\ &\cong 0.039215\end{aligned}$$

$$\sigma_p = \sqrt{0.039215} \cong 19.8\%.$$

b)

$$r_f = \frac{100\% - 97.94\%}{97.94\%} \cong 2.1\%.$$

$$\alpha_p = E(r_p) - E^{SML}(r_p)$$

$$\Rightarrow 1\% = 13.\% - [2.1\% + \beta_p \times (14\% - 2.1\%)] \Leftrightarrow \beta_p \cong 0.832.$$

c)

$$E^{SML}(r_p) = 13\% - 1\% = 12\%.$$

$$g: \quad €30M = \frac{€0.3M}{12\% - g} \Leftrightarrow g \cong 11\%.$$

d)

Seja a equação da *portfolio frontier* dada por:

$$\sigma_p^2 = aE(r_p)^2 + bE(r_p) + c$$

A questão reside em calcular o valor das constantes “a”, “b” e “c”.

A taxa de rentabilidade esperada do *minimum variance portfolio* é dada por:

$$\underset{E(r_p)}{MIN}\ \sigma_p^2 = aE(r_p)^2 + bE(r_p) + c$$

- Condição de 1ª ordem

$$\frac{d\sigma_p^2}{dE(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 2 \times aE(r_p) + b = 0 \Leftrightarrow E(r_{mvp}) = \frac{-b}{2a}.$$

Portanto, a, b, c:

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = 13.528\% \\ (0.226)^2 = a(0.08)^2 + b \times 0.08 + c \\ (0.2409)^2 = a(0.2)^2 + b \times 0.2 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -0.27056a \\ (0.226)^2 = (0.08)^2 a - 0.27056 \times 0.08a + c \\ (0.2409)^2 = (0.2)^2 a - 0.27056 \times 0.2a + c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -0.27056a \\ c = (0.226)^2 + 0.0152448a \\ (0.2409)^2 = (0.2)^2 a - 0.27056 \times 0.2a + (0.226)^2 + 0.0152448a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -0.27056 \times 6.14 \cong -1.6612 \\ c = (0.226)^2 + 0.0152448 \times 6.14 \cong 0.1447 \\ a \cong 6.14 \end{cases}$$

e)

$$\underset{E(r_p),\sigma_p^2}{MAX}\ U_p = \exp\left[E(r_p) - \frac{\sigma_p^2}{2}\right]$$

Sujeito a

$$\sigma_p^2 = 6.14E(r_p)^2 - 1.6612E(r_p) + 0.1447$$

e

$$(E(r_p) > E(r_{mvp}) = 13.528\%)$$

Tal é equivalente a resolver o seguinte problema de optimização sem restrições:

$$\underset{E(r_p),\sigma_p^2,\lambda}{MAX}\ L = \exp\left[E(r_p) - \frac{\sigma_p^2}{2}\right] + \lambda\left[\sigma_p^2 - 6.14E(r_p)^2 + 1.6612E(r_p) - 0.1447\right]$$

Condições de 1ª ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_p^2} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\exp\left[E(r_p) - \frac{\sigma_p^2}{2}\right] + \lambda[1] = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}\exp\left[E(r_p) - \frac{\sigma_p^2}{2}\right].$$

$$\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow \exp\left[E(r_p) - \frac{\sigma_p^2}{2}\right] + \lambda\left[-2 \times 6.14E(r_p) + 1.6612\right] = 0$$

$$\underset{\lambda = \frac{1}{2}\exp\left[E(r_p) - \frac{\sigma_p^2}{2}\right]}{\Rightarrow} 1 + \frac{1}{2}\left[-2 \times 6.14E(r_p) + 1.6612\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow E(r_p) \cong 29.814\% > 13.528\%.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \sigma_p^2 - 6.14E(r_p)^2 + 1.6612E(r_p) - 0.1447 = 0$$

$$\underset{E(r_p) \cong 29.814\%}{\Rightarrow} \sigma_p^2 = 6.14 \times (29.814\%)^2 - 1.6612 \times 29.814\% + 0.1447 \Leftrightarrow \sigma_p \cong 44.181\%.$$