ISCTE – Licenciatura de Finanças
***Investimentos* 2004-2005**
Exame 2ª Época - Resolução
08/07/2005 **Duração: 2.5h + 0.5h**

<u>CASO 1</u> (2x1.5=3 valores)

a) Demonstre que o beta de uma carteira de acções é dado pela média ponderada dos betas das acções componentes.

$$\begin{aligned}\beta_p &= \frac{COV(r_p, r_M)}{\sigma_M^2}\\ &= \frac{1}{\sigma_M^2} COV\left(\sum_{i=1}^{n} r_i w_i, r_M\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_M^2}\sum_{i=1}^{n} w_i COV(r_i, r_M)\\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{COV(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}\\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i\end{aligned}$$

b) Em que condições é possível obter uma taxa de rendimento realizado superior à *yield-to-maturity ask* da obrigação?

Desde que o reinvestimento do cupões intermédios seja efectuado a taxas de reinvestimento superiores à *yield-to-maturity*.

c) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: "Uma carteira de acções com um índice de Sharpe superior ao índice associado à carteira cópia de mercado também possui um *M-squared* positivo".

$$IS_p > IS_M$$

$$\Leftrightarrow \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} > \frac{r_M - r_f}{\sigma_M}$$

$$\Leftrightarrow r_M < r_f + \frac{\sigma_M}{\sigma_p}(r_p - r_f)$$

$$\Leftrightarrow r_M < \frac{\sigma_M}{\sigma_p} \times r_p + \left(1 - \frac{\sigma_M}{\sigma_p}\right) r_f$$

$$\Leftrightarrow M_p^2 < 0.$$

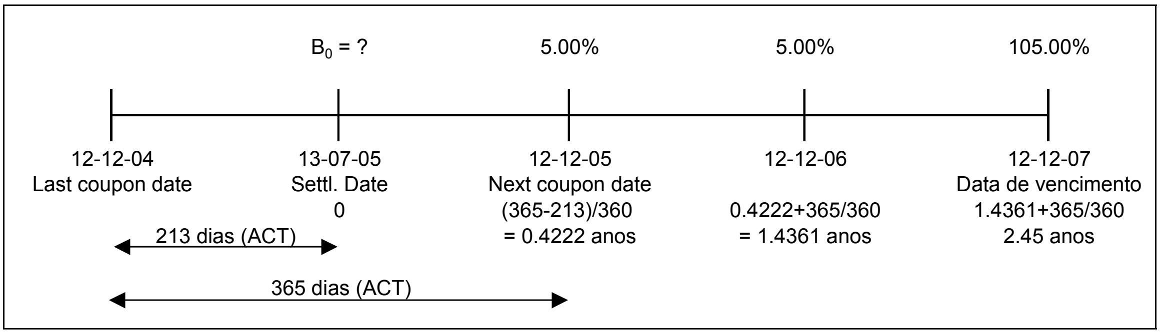
Afirmação verdadeira.

<u>CASO 2</u> (10 valores)

a)

Settlement date = 08/07/05 + 5 dias de calendário = 13/07/05.

Cash flows futuros associados à obrigação:



Portanto,

$$B_0 = \frac{5\%}{[1+r(0,0.4222)]^{0.4222}} + \frac{5\%}{[1+r(0,1.4361)]^{1.4361}} + \frac{105\%}{[1+r(0,2.45)]^{2.45}}$$

A taxa spot a 0.4222 anos pode ser obtida via *bootstrapping*:

$$100.43\% + 3\% \times \frac{213}{365} = \frac{103\%}{[1+r(0,0.4222)]^{0.4222}} \Rightarrow r(0,0.4222) = \left(\frac{103\%}{100.43\% + 3\% \times \frac{213}{365}} \right)^{1/0.4222} - 1 \cong 1.909\%.$$

As taxas spot a 1.4361 e a 2.45 anos podem ser obtida via interpolação linear:

$$r(0,1.4361) \approx 2\% + (2.5\% - 2\%) \times \frac{1.4361 - 1}{2 - 1} \cong 2.218\%.$$

$$r(0,2.45) \approx 2.5\% + (3\% - 2.5\%) \times \frac{2.45 - 2}{3 - 2} \cong 2.725\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{5\%}{[1+1.909\%]^{0.4222}} + \frac{5\%}{[1+2.218\%]^{1.4361}} + \frac{105\%}{[1+2.725\%]^{2.45}} \cong 108.11\%.$$

b)

Considerando a *yield offer*,

$$VT_0^{ask} = \frac{5\%}{[1+2.68\%]^{0.4222}} + \frac{5\%}{[1+2.68\%]^{1.4361}} + \frac{105\%}{[1+2.68\%]^{2.45}} \cong 108.17\%.$$

Decisão:

$VT_0^{ask} > B_0 \Rightarrow$ Não comprar.

Considerando a *yield bid*,

$$VT_0^{ask} = \frac{5\%}{[1+2.65\%]^{0.4222}} + \frac{5\%}{[1+2.65\%]^{1.4361}} + \frac{105\%}{[1+2.65\%]^{2.45}} \cong 108.24\%.$$

Decisão:

$VT_0^{bid} > B_0 \Rightarrow$ Vender.

c)

$$\lambda = \frac{0.25\%}{1+2\%} \cong 0.245\%$$

- Fair value da carteira:

$$B_0^C = €1M \times 108.11\% + €2M \times \left(100.43\% + 3\% \times \frac{213}{365}\right)$$

$$= €1M \times 108.11\% + €2M \times 102.18\% \cong €3{,}124{,}713.70$$

- Durações:

$$DFW_{OT5\%} = \frac{0.4222 \times \frac{5\%}{[1+1.909\%]^{0.4222}} + 1.4361 \times \frac{5\%}{[1+2.218\%]^{1.4361}} + 2.45 \times \frac{105\%}{[1+2.725\%]^{2.45}}}{108.11\%} \cong 2.31.$$

$DFW_{OT3\%} = 0.4222.$

$$DFW^{c} = 2.31 \times \frac{€1M \times 108.11\%}{€3{,}124{,}713.70} + 0.4222 \times \frac{€2M \times 102.18\%}{€3{,}124{,}713.70}$$

$$= 2.31 \times 34.60\% + 0.4222 \times 65.40\% \cong 1.075.$$

- Convexidades:

$CFW_{OT5\%} =$

$$\frac{0.4222 \times 1.4222 \times \frac{5\%}{[1+1.909\%]^{0.4222}} + 1.4361 \times 2.4361 \times \frac{5\%}{[1+2.218\%]^{1.4361}} + 2.45 \times 3.45 \times \frac{105\%}{[1+2.725\%]^{2.45}}}{108.11\%}$$

$\cong 7.87.$

$$CFW_{OT3\%} = 0.4222 \times 1.4222 \cong 0.6.$$

$$CFW^{c} = 7.87 \times 34.60\% + 0.6 \times 65.40\% \cong 3.12.$$

- Novo fair value da carteira:

$$\Delta\%B_0 \approx -1.075 \times 0.245\% + \frac{1}{2} \times 3.12 \times (0.245\%)^2 \cong -0.2624\%.$$

Portanto, o novo valor estimado para a carteira é igual a:

$$€3{,}124{,}713.70 \times (1 - 0.2624\%) \cong €3{,}116{,}514.45.$$

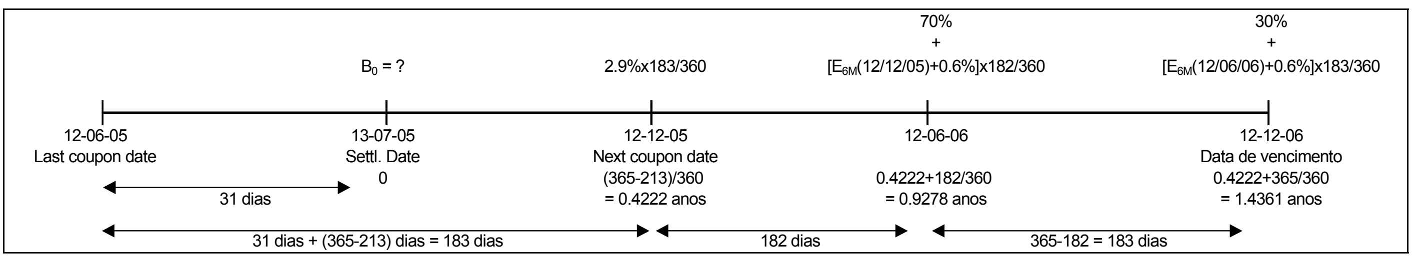
d)

Settlement date = 08/07/05 + 5 dias de calendário = 13/07/05.

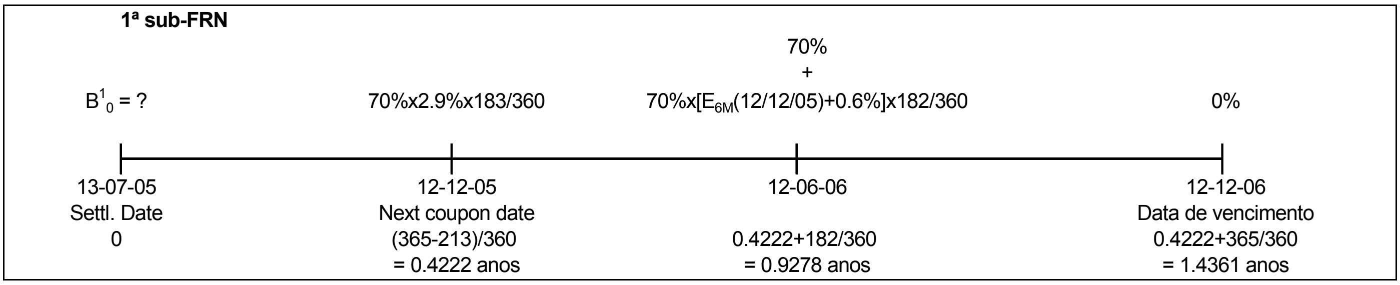
Credit spread entre *rating* AA- (S&P) e Tesouro = 0.9%.

Credit spread entre *rating* AA- (S&P) e mercado interbancário = 0.9% - 0.15% = 0.75%.

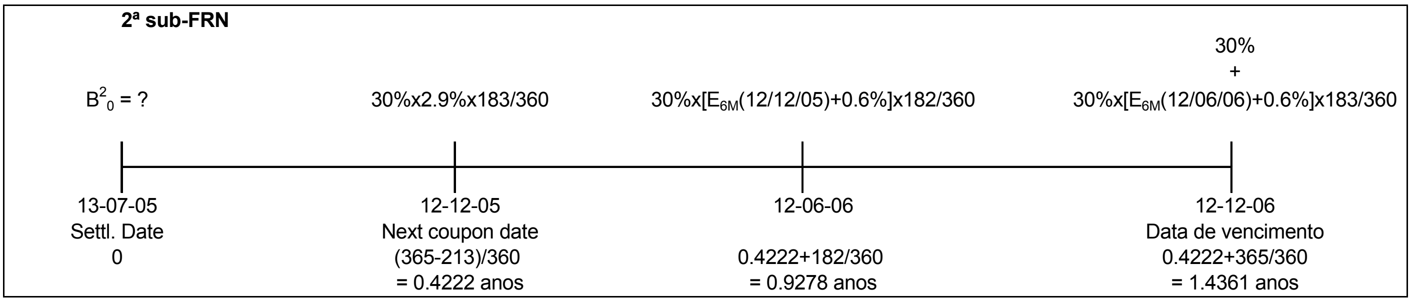
Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Para efeitos de avaliação, e atendendo ao esquema de reembolso periódico, a FRN em análise pode ser decomposta em duas FRNs com os seguintes *cash flows* futuros:



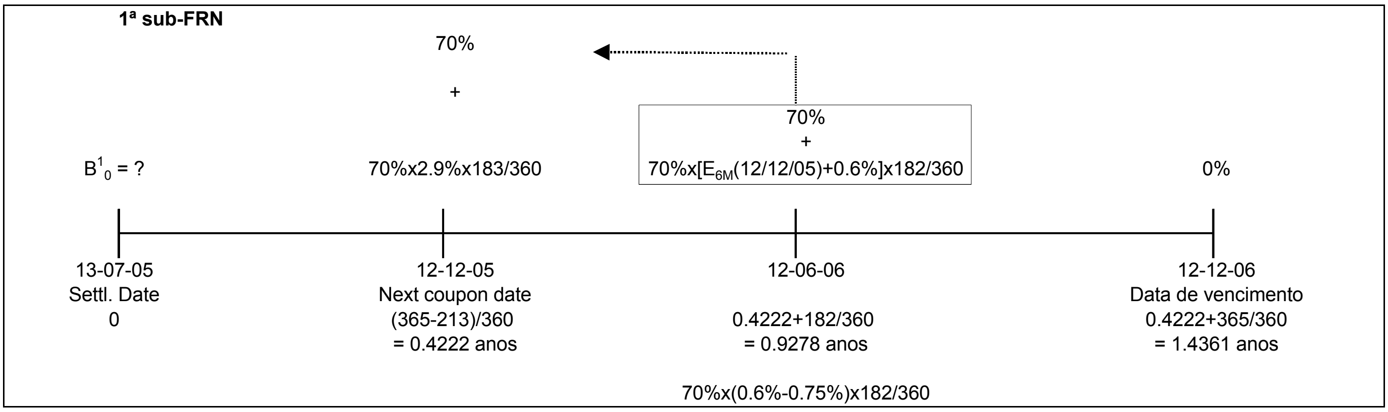
e



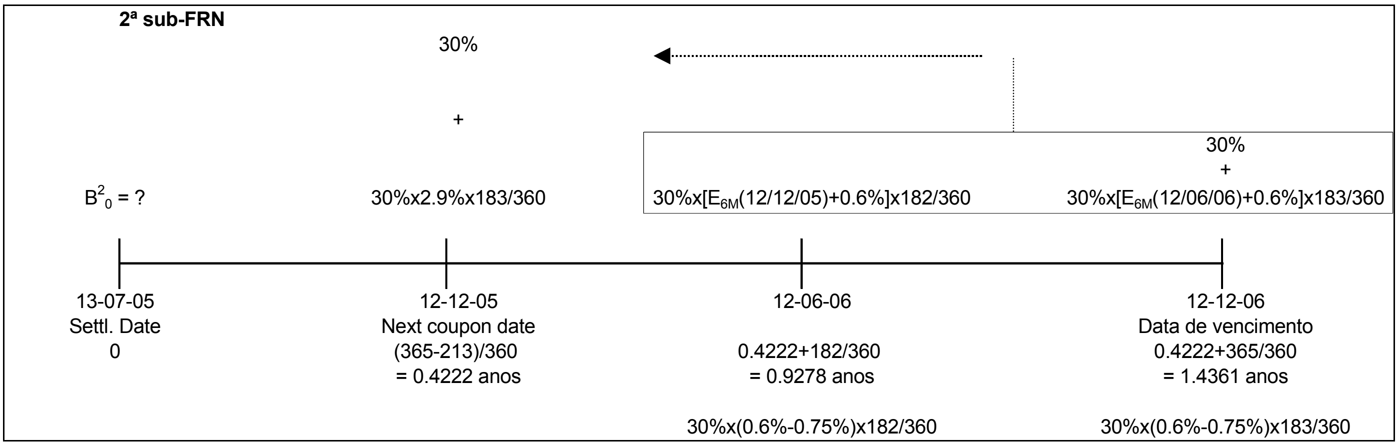
Portanto,

$$B_0 = B_0^1 + B_0^2.$$

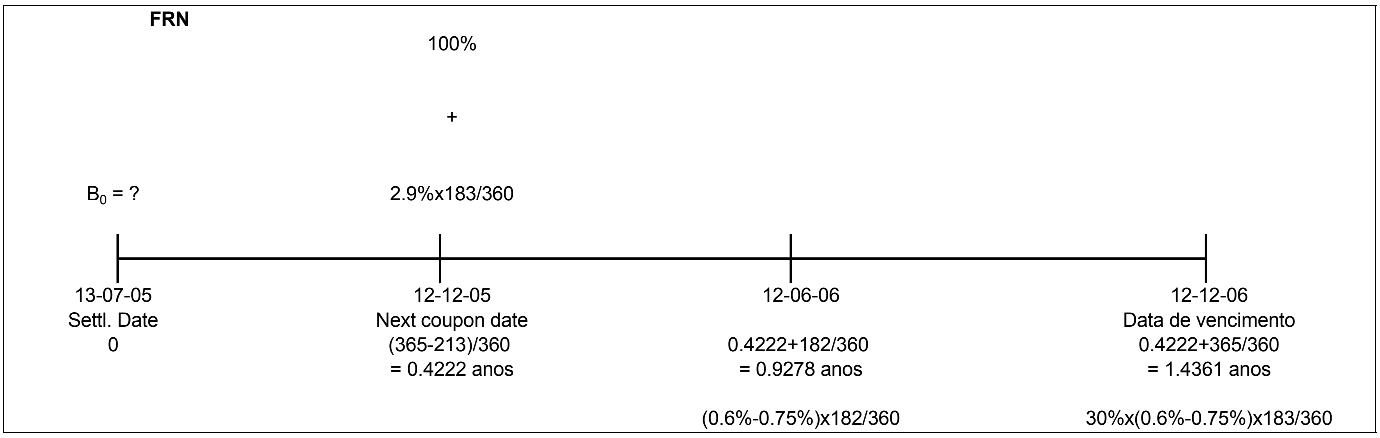
Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



e



Combinando os 2 diagramas anteriores:



Via interpolação linear:

$$\mathrm{r}(0{,}0.9278) \approx 2\% + (2.5\% - 2\%) \times \frac{0.9278 - 1}{2 - 1} \cong 1.964\%.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_0 &= \frac{100\% + 2.9\% \times \dfrac{183}{360}}{(1 + 1.909\% + 0.9\%)^{0.4222}} \\ &\quad + \frac{(0.6\% - 0.75\%) \times \dfrac{182}{360}}{(1 + 1.964\% + 0.9\%)^{0.9278}} + \frac{30\% \times (0.6\% - 0.75\%) \times \dfrac{183}{360}}{(1 + 2.218\% + 0.9\%)^{1.4361}} \\ &\cong 101.38\%.\end{aligned}$$

d)

$$\text{DFW} = \frac{1}{101.38\%} \times \left[0.4222 \times \frac{100\% + 2.9\% \times \frac{183}{360}}{(1 + 1.909\% + 0.9\%)^{0.4222}} \right.$$

$$\left. + 0.9278 \times \frac{(0.6\% - 0.75\%) \times \frac{182}{360}}{(1 + 1.964\% + 0.9\%)^{0.9278}} + 1.4361 \times \frac{30\% \times (0.6\% - 0.75\%) \times \frac{183}{360}}{(1 + 2.218\% + 0.9\%)^{1.4361}} \right]$$

$$\cong 0.4167.$$

CASO 3 (7 valores)

a)

$$\underset{E(r_p)}{\text{Min}}\, \sigma_p^2 = 1.7577E(r_p)^2 - 0.1082E(r_p) + 0.002$$

Condição de 1ª ordem:

$$\partial\sigma_p^2 / \partial E(r_p) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 1.7577E(r_p) - 0.1082 = 0 \Leftrightarrow E(r_{mvp}) \cong 3.078\%.$$

$$\sigma_{mvp} = \sqrt{1.7577 \times (3.078\%)^2 - 0.1082 \times 3.078\% + 0.002} \cong 1.83\%.$$

b)

$$E(r_p) = 3\% \times 0.6 + 20\% \times 0.2 + 10\% \times 0.1 + 1.5\% \times 0.1 = 9.5\%.$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (0.6 \times 0.03)^2 + (0.2 \times 0.2)^2 + (0.1 \times 0.1)^2 \\ &\quad + 2 \times 0.6 \times 0.2 \times 0.02 \times 0.35 \times (-0.3) + 2 \times 0.6 \times 0.1 \times 0.02 \times 0.1 \times 0.4 \\ &\quad + 2 \times 0.2 \times 0.1 \times 0.35 \times 0.15 \times (-0.2)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = 0.010375 \Rightarrow \sigma_p \cong 10.186\%.$$

c)

Visto que a carteira do Fundo ESC integra o “activo sem risco” (a componente “liquidez” possui um desvio-padrão de rentabilidade igual a zero), a actual composição só é eficiente se estiver localizada sobre a fronteira eficiente global (ao invés da fronteira eficiente de Markowitz).

Para definir a fronteira eficiente global é necessário determinar a "carteira de tangência" T.

Inclinação da fronteira eficiente global: $\frac{E(r_T)-1.5\%}{\sigma_T}$.

Inclinação da fronteira eficiente de Markowitz:

$$\left.\frac{\partial E(r_p)}{\partial \sigma_p}\right|_{p\equiv T} = \left[\frac{2\times 1.7577E(r_p)-0.1082}{2\sqrt{1.7577E(r_p)^2-0.1082E(r_p)+0.002}}\right]_{p\equiv T}^{-1}.$$

Igualando as duas inclinações:

$$\left[\frac{2\times 1.7577E(r_p)-0.1082}{2\sqrt{1.7577E(r_p)^2-0.1082E(r_p)+0.002}}\right]_{p\equiv T}^{-1} = \frac{E(r_T)-0.01.5}{\sqrt{1.7577E(r_p)^2-0.1082E(r_p)+0.002}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left[1.7577E(r_T)^2-0.1082E(r_T)+0.002\right]}{2\times 1.7577E(r_T)-0.1082} = E(r_T)-0.015$$

$$\Leftrightarrow 2\left[1.7577E(r_T)^2-0.1082E(r_T)+0.002\right]$$
$$= 2\times 1.7577E(r_T)^2 - 2\times 1.7577\times 0.015E(r_T) - 0.1082E(r_T) + 0.1082\times 0.015$$

$$\Leftrightarrow E(r_T) = \frac{0.1082\times 0.015 - 2\times 0.002}{-0.1082 + 2\times 1.7577\times 0.015} \cong 4.285\%.$$

Portanto,

$$\sigma_T = \sqrt{1.7577\times(4.285\%)^2 - 0.1082\times 4.285\% + 0.002} \cong 2.431\%.$$

Equação da fronteira eficiente global:

$$E(r_p) = 1.5\% + \frac{4.285\%-1.5\%}{2.431\%}\sigma_p$$

Assim, a actual composição só é eficiente sse a anterior equação for verificada:

$$\Rightarrow 9.5\% = 1.5\% + \frac{4.285\%-1.5\%}{2.431\%}\times 10.186\%$$

$$\Leftrightarrow 9.5\% = 13.169\% \Leftrightarrow \text{false.}$$

Visto a anterior proposição ser falsa, conclui-se que a actual composição é ineficiente. De facto, para igual nível de risco (10.186%) é possível obter um maior nível de rentabilidade esperada (13.169% > 9.5%).

d)

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p\}}{MAX} \quad U \equiv \ln\left[E(r_p) - 2\sigma_p^2\right]$$

Sujeito a

$$E(r_p) = 1.5\% + \frac{4.285\% - 1.5\%}{2.431\%}\sigma_p$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p,\lambda\}}{MAX} \quad L \equiv \ln\left[E(r_p) - 2\sigma_p^2\right] + \lambda\left[0.015 + 1.1456\sigma_p - E(r_p)\right]$$

Condições de primeira ordem:

- $$\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{E(r_p) - 2\sigma_p^2} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{E(r_p) - 2\sigma_p^2}$$

- $$\frac{\partial L}{\partial \sigma_p} = 0 \Leftrightarrow \frac{-4\sigma_p}{E(r_p) - 2\sigma_p^2} + 1.1456\lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{-4\sigma_p}{E(r_p) - 2\sigma_p^2} + \frac{1.1456}{E(r_p) - 2\sigma_p^2} = 0 \Leftrightarrow \sigma_p = \frac{1.1456}{4} \cong 28.64\%.$$

- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 0.015 + 1.1456\sigma_p - E(r_p) = 0$$
  $$\Rightarrow E(r_p) = 1.5\% + 1.1456 \times 28.64\% \cong 34.31\%$$