

**OPÇÕES EXÓTICAS**  
**MSc MATEMÁTICA FINANCEIRA 2008/09**  
**EXAME**

**29/07/09**

**Duração: 2.5 horas**

**CASO 1 (2x2.0=4 valores)**

Responda (sucinta e objectivamente) a somente duas das questões seguintes:

a) Considere uma put Europeia sobre o activo “S”, com strike “X”, com vencimento no momento “T” e com um prémio igual a “Kp”. Ao contrário do que é habitual, o prémio “kp” não é liquidado hoje na data de transacção (momento “t”). Este prémio apenas será liquidado pelo comprador da put na data de vencimento (momento “T”) caso a put termine in-the-money. Formule, no momento “t” ( $\leq T$ ), o cálculo do prémio “kp” desta put option.

b) Considere uma fixed-strike lookback European call com strike “X”, vencimento no momento “T” e que inside sobre apenas 80% do máximo registado pelo activo subjacente “S” entre os momentos “t” (data de avaliação) e “T”. Defina, no momento “t” ( $\leq T$ ), a fórmula de avaliação deste contrato.

c) Considere uma call Europeia sobre o activo “S”, com strike “X”, com vencimento no momento “T” e com um payoff terminal igual a:

$$V_T = \max[\min(S_T, L) - X; 0],$$

onde  $L \in \mathfrak{R}_+$  estabelece uma limitação sobre o potencial de valorização da call. Defina, no momento “t” ( $\leq T$ ), a fórmula de avaliação deste contrato.

**CASO 2 (6 valores)**

Considere as seguintes informações relevantes para a avaliação de opções Europeias sobre o índice CAC40 e cotadas em euros:

- Euribor a 6 meses: 1.5% (30/360);
- Volatilidade anualizada do CAC40: 30%;
- *Dividend yield* estimada para o CAC40 (em regime de capitalização contínua): 3.474%;
- Cotação *spot* do CAC40: 943.00 pontos.

Nos dois quadros seguintes efectuem-se 10 simulações da evolução do índice CAC40 ao longo dos próximos 6 meses, considerando intervalos de tempo mensais. Para cada simulação, a penúltima coluna do segundo quadro contém o *payoff* terminal de uma *European fixed-strike lookback put* sobre o índice CAC40, com strike igual a 900 pontos e com vencimento a 6 meses. A última coluna do segundo quadro contém o quadrado do *payoff* terminal da opção em apreço. A antepenúltima coluna do segundo quadro contém a cotação mensal mínima registada em cada simulação.

Random numbers from $N(0,1)$						
$j \setminus i$	1	2	3	4	5	6
1	-1.2775	1.4249	-0.6001	0.5075	0.6168	-1.4433
2	-1.0591	0.6473	0.5499	-0.0058	0.4383	-0.8401
3	2.1477	-0.1069	-0.8397	-1.4516	1.1493	0.0830
4	1.3089	0.3747	0.4271	1.5680	-0.2050	0.3720
5	0.7227	-0.8775	0.0411	-0.3489	1.6734	-0.0859
6	0.1628	-0.2142	0.6492	0.4319	-1.6076	-0.6107
7	-0.2681	-0.0378	2.0719	-0.7253	0.2988	-0.1562
8	-0.3437	-2.1762	-0.0666	-0.6125	0.4838	0.1282
9	0.0817	0.2929	0.0192	-0.6990	0.8479	-0.4260
10	-1.3071	-0.6880	-0.0989	-0.1545	-0.5803	2.4771

Paths for underlying asset price										
$j \setminus i$	0	1	2	3	4	5	6	$\min(S_{i,j})$	$V_{t,j}$	$(V_{t,j})^2$
1	943,00	839,69	944,86	892,17	927,23	972,84	853,91	839,69	60,31	3.637,57
2	943,00	855,72	900,19	939,01	933,49	964,38	891,87	855,72	44,28	1.960,51
3	943,00	1.129,65	1.113,21	1.029,56	903,04	992,18	993,95	903,04	-	-
4	943,00	1.050,50	1.079,30	1.113,93	1.269,08	1.240,03	1.273,74	943,00	-	-
5	943,00	998,50	920,44	918,75	886,60	1.019,34	1.006,34	886,60	13,40	179,61
6	943,00	951,24	928,73	977,15	1.008,93	873,07	823,64	823,64	?	?
7	943,00	916,39	908,48	1.081,17	?	1.030,78	1.011,45	908,48	?	?
8	943,00	910,41	749,97	741,64	699,54	725,55	729,70	699,54	200,46	40.182,91
9	943,00	944,58	963,63	960,03	898,78	962,05	922,21	898,78	1,22	1,49
10	943,00	837,54	784,84	773,96	759,56	718,44	885,55	718,44	181,56	32.963,03
total									577,59	84.756,52

Pretende-se que:

- Calcule os cinco valores assinalados por pontos de interrogação nos dois quadros anteriores. (2V)
- Calcule o fair value da opção bem como o desvio-padrão de tal estimativa. (2V)
- O quadro seguinte resume as cotações médias mensais em cada simulação bem como os valores admissíveis, à data de avaliação e em cada simulação, de uma *European average price call* sobre o índice CAC40, com strike igual a 950 pontos, com vencimento a 6 meses e sobre a média aritmética simples das 6 cotações mensais a registar nos próximos 6 meses. Pretende-se que calcule o valor assinalado por um ponto de interrogação bem como a estimativa do preço da opção. (2V)

$j$	Save	$V_{t,j}$
1	905.12	0.00
2	914.11	0.00
3	1,026.93	?
4	1,171.10	219.45
5	958.33	8.27
6	927.12	0.00
7	993.03	42.70
8	759.47	0.00
9	941.88	0.00
10	793.32	0.00

### **CASO 3 (10 valores)**

Considere as seguintes condições de mercado:

- Taxas *spot* do EUR a 12 meses e 2 anos: 2% e 3%, respectivamente (capitalização contínua);
- Volatilidade anualizada do PSI20: 20%;
- *Dividend yield* estimada para o PSI20: 1% (capitalização contínua);
- Cotação *spot* do PSI20: 7,205.00 pontos;
- O mercado transacciona as seguintes opções Europeias sobre o índice PSI20 e com cotações em pontos de índice:

	12 months				2 years	
strikes	5,003.47	6,992.06	7,205.00	8,646.00	7,205.00	8,646.00
<i>Call standard</i>	2,242.87	707.98	601.58	166.97	924.86	419.99
<i>Put standard</i>	13.96	428.28	530.60	1,508.45	647.94	1,500.16
<i>Cash-or-nothing call</i>	0.9429	0.5291	0.4706	0.1648	0.4709	0.2445
<i>Cash-or-nothing put</i>	0.0373	0.4511	0.5096	0.8154	0.4709	0.6973

Pretende-se que:

- a) Formule uma decisão de investimento relativamente a um depósito bancário (denominado em EUR) com vencimento a 1 ano e com uma remuneração igual a 15% ao ano caso o índice PSI20 termine cotado entre os 7,500 pontos e os 8,000 pontos. (2V)
- b) Formule uma decisão de investimento relativamente a um depósito bancário (denominado em EUR) com um valor de reembolso (daqui a 2 anos) de 80% e que permite ao investidor decidir, daqui a 1 ano, se pretende apostar na desvalorização do índice PSI20 (face à cotação actual) durante mais um ano, ou apostar na valorização do índice PSI20 (face a 90% da cotação actual) durante mais um ano. Para o efeito, considere que uma cotação de 6,760.18 pontos do índice PSI20 a vigorar daqui a 1 ano torna indiferente a opção, daqui a 1 ano, pela valorização ou desvalorização. Assuma uma curva de taxas de juro *flat* nos 3% (RCC) até 2 anos e considere as seguintes probabilidades geradas por uma distribuição normal bivariada *standard*: (2V)

a	b	rho	M(a,b;rho)
0.518627	0.655348	0.707107	0.615148
0.318627	0.372506	0.707107	0.517482
-0.518627	0.655348	-0.707107	0.128731
-0.318627	0.372506	-0.707107	0.127760
-0.518627	-0.655348	0.707107	0.173280
-0.318627	-0.372506	0.707107	0.247245
0.518627	-0.655348	-0.707107	0.082842
0.318627	-0.372506	-0.707107	0.107514
0.518627	0.282843	0.707107	0.534870
0.318627	0.000000	0.707107	0.429687
-0.518627	0.282843	-0.707107	0.076481
-0.318627	0.000000	-0.707107	0.070313
-0.518627	-0.282843	0.707107	0.225529
-0.318627	0.000000	0.707107	0.304692
0.518627	-0.282843	-0.707107	0.163119
0.318627	0.000000	-0.707107	0.195308

c) Formule uma decisão de investimento relativamente a um depósito bancário (denominado em EUR) com vencimento a 1 ano e com uma remuneração igual a 60% da taxa de desvalorização do índice PSI20, desde que tal índice nunca suba acima dos 8,646 pontos. Caso o índice PSI20 ultrapasse os 8,646 pontos durante o próximo ano, então a remuneração a liquidar no final do ano será igual a 1%. (3V)

d) A instituição financeira ACN pretende emitir ao par, e com uma margem de lucro igual a 1% do valor nominal, obrigações de caixa com as seguintes características:

- Valor nominal = EUR 10,000,000;
- Reembolso *bullet* e ao par daqui a 2 anos;
- Remuneração variável a liquidar daqui a 24 meses:  $x\%$  da taxa de desvalorização ou de valorização do índice PSI20 durante os próximos 24 meses de vigência da aplicação, sendo as taxas de variação calculadas a partir de 120% da cotação actual do índice PSI20;
- Daqui a 12 meses o obrigacionista pode optar por apostar na valorização ou desvalorização do índice PSI20. Caso opte, daqui a 12 meses, pela alternativa de valorização, a remuneração variável a liquidar daqui a 24 meses será igual a

$$x\% \times \begin{cases} \frac{S_{24M} - S_0}{S_0} \Leftarrow S_{24M} > 1.2S_0 \\ 0\% \Leftarrow S_{24M} \leq 1.2S_0 \end{cases} . \text{ Caso opte, daqui a 12 meses, pela alternativa de}$$

desvalorização, a remuneração variável a liquidar daqui a 24 meses será igual a

$$x\% \times \begin{cases} \frac{S_0 - S_{24M}}{S_0} \Leftarrow S_{24M} \leq 1.2S_0 \\ 0\% \Leftarrow S_{24M} > 1.2S_0 \end{cases} .$$

Defina a percentagem  $x\%$  de participação na valorização do índice PSI20 a oferecer aos obrigacionistas. (3V)