COMPLEMENTOS DE OPÇÕES 2006-2007
MESTRADO EM FINANÇAS - ISCTE
EXAME - Resolução
13/07/07 **Duração: 2.5 horas**

CASO 1

a) Formule, no momento "t" ($\leq T$), o cálculo do fair value de uma obrigação de caixa com vencimento no momento "T" e que paga nessa mesma data um único cash flow igual ao valor nominal multiplicado pelo rácio entre a cotação spot do índice DAX (S_T) no momento "T" e a cotação mínima registada pelo DAX entre os momentos "t" e "T".

O *payoff*, na data de vencimento, da obrigação de caixa é dado por:

$$B_T = 100\% \times \frac{S_T}{\inf\limits_{t \leq u \leq T}(S_u)}$$

Portanto,

$$B_t = e^{-r(T-t)} \times E_Q\left[\left. \frac{S_T}{\inf\limits_{t \leq u \leq T}(S_u)} \right| F_t \right].$$

Para avançar necessitamos da função densidade de probabilidade conjunta do preço spot e do respectivo mínimo. É mais simples operar uma mudança de medida de probabilidade, tomando como numerário o spot acumulado de dividendos:

$$\frac{B_t}{e^{rt}} = E_Q\left[\left. \frac{\frac{S_T}{\inf\limits_{t \leq u \leq T}(S_u)}}{e^{rT}} \right| F_t \right] \Leftrightarrow \frac{B_t}{S_t e^{qt}} = E_{Q_S}\left[\left. \frac{\frac{S_T}{\inf\limits_{t \leq u \leq T}(S_u)}}{S_T e^{qT}} \right| F_t \right] \Leftrightarrow B_t = S_t e^{-q(T-t)} E_{Q_S}\left[\left. \frac{1}{\inf\limits_{t \leq u \leq T}(S_u)} \right| F_t \right],$$

onde Q_S é a nova medida de probabilidade associada ao novo numerário $S_t e^{qt}$ e definida através da seguinte Rádon-Nikodym derivative:

$$\left. \frac{dQ_S}{dQ} \right| F_t = \frac{S_T e^{qT}}{S_t e^{qt}} \frac{e^{rt}}{e^{rT}}.$$

Assumindo que "S" segue um GBM, i.e. que

$$S_T = S_t \exp\left\{ \left[r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right](T-t) + \sigma \int_t^T dW_u^Q \right\},$$

então:

$$\left.\frac{dQ_S}{dQ}\right| F_t = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_t^T (-\sigma)^2 du - \int_t^T (-\sigma) dW_u^Q\right].$$

Aplicando o teorema de Girsanov,

$$dW_t^{Q_S} = -\sigma dt + dW_t^Q.$$

Consequentemente,

$$S_T = S_t \exp\left\{\left[r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right](T-t) + \sigma\int_t^T \left(\sigma du + dW_u^{Q_S}\right)\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$S_T = S_t \exp\left\{\left[r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right](T-t) + \sigma\int_t^T dW_u^{Q_S}\right\}.$$

Comparando as 2 últimas equações constata-se que a função densidade de probabilidade da taxa de rentabilidade mínima do índice pode ser obtida, na nova medida Q_S, via equação (151) com $\theta = -1$ e substituindo $\mu := r - q - \frac{\sigma^2}{2}$ por $\bar{\mu} := r - q + \frac{\sigma^2}{2}$. Assim,

$$B_t = S_t e^{-q(T-t)} E_{Q_S}\left\{\left.\frac{1}{S_t \exp\left[\inf\limits_{t \le u \le T}\left(\ln\left(\frac{S_u}{S_t}\right)\right)\right]}\right| F_t\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$B_t = e^{-q(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^y}\left\{\phi\left[y; \bar{\mu}(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right] + \frac{2\bar{\mu}}{\sigma^2}\exp\left(\frac{2\bar{\mu}y}{\sigma^2}\right)\Phi\left[\frac{y - \bar{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right.$$

$$\left. + \exp\left(\frac{2\bar{\mu}y}{\sigma^2}\right)\phi\left[y; -\bar{\mu}(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right]\right\} dy$$

b) A obrigação GN tem vencimento a 1 ano, reembolso *bullet* e um cupão anual igual à taxa de rentabilidade da acção GN, caso a acção GN nunca desça abaixo de 90% da cotação actual em qualquer momento durante o próximo ano. Caso contrário, o cupão será igual a zero. Formule a avaliação desta obrigação.

O *payoff*, na data de vencimento, da obrigação GN é dado por:

$$B_1 = 100\% + \begin{cases} \dfrac{S_1 - S_0}{S_0} \Leftarrow \inf\limits_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0 \\ 0\% \Leftarrow else \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B_1 = 100\% + \frac{S_1}{S_0} \times 1_{\left\{\inf\limits_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0\right\}} - 1_{\left\{\inf\limits_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0\right\}}$$

Portanto,

$$B_0 = 100\% \times e^{-r\times 1} + e^{-r\times 1} \times \frac{1}{S_0} \times E_Q\left[S_1 \times 1_{\left\{\inf\limits_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0\right\}} \middle| F_0\right] - e^{-r\times 1} \times Q\left[\inf_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0 \middle| F_0\right].$$

O terceiro termo do lado direito da equação anterior pode ser imediatamente calculado via Proposição 45:

$$Q\left[\inf_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0 \middle| F_0\right] = \Phi\left[d_2^M(1;0.9)\right] - (0.9)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \times \Phi\left[d_2^M(0.9;1)\right].$$

Relativamente ao 2º termo, é necessário operar uma mudança de medida de probabilidade, tomando como numerário o spot acumulado de dividendos:

$$e^{-r\times 1} \times \frac{1}{S_0} \times E_Q\left[S_1 \times 1_{\left\{\inf\limits_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0\right\}} \middle| F_0\right] = \frac{1}{S_0} \times S_0 \times e^{-q\times 1} \times E_{Q_S}\left[1_{\left\{\inf\limits_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0\right\}} \middle| F_0\right]$$

$$= e^{-q\times 1} \times Q_S\left[\inf_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0 \middle| F_0\right]$$

Finalmente, esta última probabilidade pode ser calculada via Proposição 45 com $\eta = -1$ e substituindo $\mu := r - q - \frac{\sigma^2}{2}$ por $\bar{\mu} := r - q + \frac{\sigma^2}{2}$. Assim,

$$Q_S\left[\inf_{u\in[0,1]}(S_u) > 0.9S_0 \middle| F_0\right] = \Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{0.9}\right) + \bar{\mu} \times 1}{\sigma\sqrt{1}} + \sigma\sqrt{1}\right] - (0.9)^{\frac{2\bar{\mu}}{\sigma^2}} \times \Phi\left[\frac{\ln(0.9) + \bar{\mu} \times 1}{\sigma\sqrt{1}} + \sigma\sqrt{1}\right].$$

c) Formule, no momento "t" ($\leq T$), uma estratégia de *static hedging* para uma opção sobre o activo "S" e com um *payoff* terminal, no momento "T", igual a $[S_T - X_1]$ caso $S_T > X_2$, com $X_1, X_2 \in \Re$.

Payoff terminal da opção em apreço:

$$V_T = \begin{cases} S_T - X_1 \Leftarrow S_T > X_2 \\ 0 \Leftarrow S_T \le X_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S_T - X_2 + (X_2 - X_1) \Leftarrow S_T > X_2 \\ 0 \Leftarrow S_T \le X_2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} S_T - X_2 \Leftarrow S_T > X_2 \\ 0 \Leftarrow S_T \le X_2 \end{cases} + = \begin{cases} (X_2 - X_1) \Leftarrow S_T > X_2 \\ 0 \Leftarrow S_T \le X_2 \end{cases}$$

$$= c_T(S_T, X_2, T) + D(1)_T(S_T, X_2, T; M = X_2 - X_1).$$

Estratégia de *static hedging*:

i) Comprar call standard com strike X_2 e vencimento no momento “T”; e

ii) Comprar cash-or-nothing call com strike X_2, vencimento no momento “T” e contract size igual a $(X_2 - X_1)$.

CASO 2

a)

$$r: \quad e^{r\times 6/12} = 1 + 4\% \times 6/12 \Rightarrow r = \frac{12}{6}\ln\left(1 + 4\% \times 6/12\right) \cong 3.961\%.$$

$$S_{2,10} = 13{,}381.39 \times \exp\left\{\left[3.961\% - 1\% - \frac{(0.25)^2}{2}\right] \times \frac{1}{12} + (-1.30839) \times 0.25 \times \sqrt{\frac{1}{12}}\right\}$$
$$\cong 12{,}174.00.$$

$$V_{2,10} = \max(13{,}381.39 - 12{,}523.28\,;0) = 858.11.$$

$$(V_{2,10})^2 = (858.11)^2 \cong 736{,}346.42.$$

b)

$$\hat{V}_0 = e^{-3.961\%\times 0.5} \times \frac{14,399.59}{10}$$
$$\cong 1,411.72.$$

$$\sigma\left(\hat{V}_0\right) = \frac{e^{-3.961\%\times 0.5}}{\sqrt{10}} \times \sqrt{\frac{33,689,231.79 - \left(14,399.59\right)^2 / 10}{10-1}} \cong 371.95.$$

c)

Valor actual do depósito bancário:

$$B_0 = \frac{100\%}{1 + 4\% \times 6/12} + RV_0.$$

Por seu turno,

$$RV_{6M,j} = \begin{cases} 12\% \times 6/12 \Leftarrow \max\limits_{i=1,\dots,6}\left(S_{i,j}\right) < 12,500 \wedge \min\limits_{i=1,\dots,6}\left(S_{i,j}\right) > 10,000 \\ 0\% \Leftarrow else \end{cases}$$

Ora,

j \ i	max($S_{i,j}$)	min($S_{i,j}$)	$RV_{6M,j}$
1	12,014.14	10,342.49	6%
2	12,000.00	8,417.50	0%
3	12,000.00	8,742.08	0%
4	14,179.16	10,787.04	0%
5	12,000.00	10,923.06	6%
6	12,994.01	11,858.73	0%
7	12,000.00	9,813.80	0%
8	12,199.13	9,557.00	0%
9	15,134.26	12,000.00	0%
10	13,381.39	11,097.89	0%
		total	12%

Portanto,

$$RV_0 = e^{-3.961\%\times 0.5} \times \frac{12\%}{10}$$
$$\cong 1.18\%.$$

$B_0 = 98.04\% + 1.18\% = 99.22\% < 100\% \Rightarrow$ Não depositar.

CASO 3

a)

$B_0 = 100\% \times e^{-4\% \times 1} + RV_0.$

$$RV_1 = \begin{cases} 10\% \Leftarrow ELSE \\ 0\% \Leftarrow 9{,}000 \le S_{0.5} \le 11{,}000 \end{cases}$$

$$= 10\% - \begin{cases} 0\% \Leftarrow ELSE \\ 10\% \Leftarrow 9{,}000 \le S_{0.5} \le 11{,}000 \end{cases}$$

$$\underline{= 10\% - 10\% \times RD_1\left(S; X_a = 9{,}000; X_b = 11{,}000; T = 1; M = 1\right).}$$

Portanto,

$$\underline{RV_0 = 10\% \times e^{-4\% \times 1} - 10\% \times RD_0\left(S; X_a = 9{,}000; X_b = 11{,}000; T = 1; M = 1\right).}$$

Mas,

$RD_0\left(S; X_a = 9{,}000; X_b = 11{,}000; T = 1; M = 1\right)$

$$\underline{= e^{-4\% \times 1} \times \left\{\Phi\left[d_2^M(9{,}000)\right] - \Phi\left[d_2^M(11{,}000)\right]\right\}.}$$

$$d_2^M(9{,}000) = \frac{\ln\left(\frac{10{,}000}{9{,}000}\right) + \left[4\% - 1.98\% - \frac{(0.25)^2}{2}\right] \times 1}{0.25 \times \sqrt{1}} \cong 0.3772$$

$$\Rightarrow \Phi\left[d_2^M(9{,}000)\right] \cong \Phi(0.38) = 0.6480$$

$$d_2^M(11{,}000) = \frac{\ln\left(\frac{10{,}000}{11{,}000}\right) + \left[4\% - 1.98\% - \frac{(0.25)^2}{2}\right] \times 1}{0.25 \times \sqrt{1}} \cong -0.4254$$

$$\Rightarrow \Phi\left[d_2^M(11{,}000)\right] \cong 1 - \Phi(0.43) = 0.3336$$

Em suma,

$$\underline{RV_0 = 10\% \times e^{-4\% \times 1} - 10\% \times e^{-4\% \times 1} \times (0.6480 - 0.3336) \cong 6.61\%.}$$

$$B_0 = 96.08\% + 6.61\% = 102.69\% > 100\% \Rightarrow \text{ Depositar.}$$

b)

Via proposição 19:

$$pc_0 = -10{,}000 \times e^{-1.98\% \times 1} \times M\left(-a_1^*, b_1; -\sqrt{\frac{0.5}{1}}\right) + 10{,}000 \times e^{-4\% \times 1} \times M\left(-a_2^*, b_2; -\sqrt{\frac{0.5}{1}}\right)$$
$$+ 670 \times e^{-4\% \times 0.5} \times \Phi(-a_2^*).$$

Visto que:

$$S^* = 9{,}860.74;$$

$$a_1^* = \frac{\ln\left(\frac{10{,}000}{9{,}860.74}\right) + \left(4\% - 1.98\% + \frac{(0.25)^2}{2}\right) \times 0.5}{0.25 \times \sqrt{0.5}} \cong 0.224851;$$

$$a_2^* = 0.224851 - 0.2 \times \sqrt{0.5} \cong 0.0480744;$$

$$b_1 = \frac{\ln\left(\frac{10{,}000}{10{,}000}\right) + \left[4\% - 1.98\% + \frac{(0.25)^2}{2}\right] \times 1}{0.25 \times \sqrt{1}} \cong 0.2058;$$

$$b_2 = 0.2058 - 0.25 \times \sqrt{1} \cong \text{-}0.0442;$$

então:

$$pc_0 = -10{,}000 \times e^{-1.98\% \times 1} \times M(-0.224851, 0.2058; -0.7071068)$$
$$+ 10{,}000 \times e^{-4\% \times 1} \times M(-0.0480744, -0.0442; -0.7071068)$$
$$+ 670 \times e^{-4\% \times 0.5} \times \Phi(-0.0480744).$$

Utilizando a tabela de probabilidades e a distribuição normal e univariada standard,

$$pc_0 = -10{,}000 \times e^{-1.98\% \times 1} \times 0.118302 + 10{,}000 \times e^{-4\% \times 1} \times 0.107416 + 670 \times e^{-4\% \times 0.5} \times 0.4808$$

$\cong 187.99.$

c)

$$B_0 = 100\% \times e^{-4\% \times 1} + RV_0.$$

$$RV_1 = 120\% \times \begin{cases} 10\% \Leftarrow \dfrac{S_1 - S_0}{S_0} \geq 10\% \wedge \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) \geq 9{,}800 \\ \dfrac{S_1 - S_0}{S_0} \Leftarrow 0\% \leq \dfrac{S_1 - S_0}{S_0} \leq 10\% \wedge \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) \geq 9{,}800 \\ 0\% \Leftarrow \dfrac{S_1 - S_0}{S_0} \leq 0\% \vee \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) < 9{,}800 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow RV_1 = \frac{120\%}{S_0} \times \begin{cases} 0.1S_0 \Leftarrow S_1 \geq 1.1S_0 \wedge \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) \geq 9{,}800 \\ S_1 - S_0 \Leftarrow S_0 \leq S_1 \leq 1.1S_0 \wedge \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) \geq 9{,}800 \\ 0 \Leftarrow S_1 < S_0 \vee \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) < 9{,}800 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow RV_1 =$$

$$\frac{120\%}{S_0} \times \begin{cases} S_1 - S_0 \Leftarrow S_1 \geq S_0 \wedge \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) \geq 9{,}800 \\ 0 \Leftarrow S_1 < S_0 \vee \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) < 9{,}800 \end{cases}$$

$$-\frac{120\%}{S_0} \times \begin{cases} S_1 - 1.1S_0 \Leftarrow S_1 > 1.1S_0 \wedge \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) \geq 9{,}800 \\ 0 \Leftarrow S_1 < 1.1S_0 \vee \inf\limits_{0<u\leq 1}(S_u) < 9{,}800 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow RV_1 = \frac{120\%}{S_0} \times \left[c_1^{do}(S_1; X = S_0; H = 9{,}800; T = 1y) - c_1^{do}(S_1; X = 1.1S_0; H = 9{,}800; T = 1y)\right]$$

Portanto,

$$RV_0 = \frac{120\%}{S_0} \times \left[c_0^{do}(S_0; X = S_0; H = 9{,}800; T = 1y) - c_0^{do}(S_0; X = 1.1S_0; H = 9{,}800; T = 1y)\right]$$

Utilizando os dados do enunciado,

$$RV_0 = \frac{120\%}{S_0} \times \left[c_0^{do}\left(S_0; X = 10{,}000; H = 9{,}800; T = 1y\right) - c_0^{do}\left(S_0; X = 11{,}000; H = 9{,}800; T = 1y\right) \right]$$

$$= \frac{120\%}{10{,}000} \times \left(207.37 - 151.25\right)$$

$$\cong 0.67\%$$

Em suma,

$B_0 = 96.08\% + 0.67\% = 96.75\% < 100\% \Rightarrow$ Não depositar.

d)

$B_0 = 100\% \times e^{-4.5\% \times 2} + RV_0$.

$$RV_{2y} = x\% \times \max\left(0\%; \frac{S_2 - 90\% S_1}{90\% S_1}\right)$$

$$= \frac{x\%}{0.9 S_1} \times \max\left(0\%; S_2 - 0.9 S_1\right)$$

$$= \frac{x\%}{0.9 S_1} \times c_2\left(S_2; X = 0.9 S_1; T = 2y\right)$$

$$RV_1 = e^{-r(1,2)\times(2-1)} E_Q\left[\frac{x\%}{0.9 S_1} \times c_2\left(S_2; X = 0.9 S_1; T = 2y\right) \middle| F_1 \right]$$

$$= \frac{x\%}{0.9 S_1} \times \left\{ e^{-r(1,2)\times(2-1)} E_Q\left[c_2\left(S_2; X = 0.9 S_1; T = 2y\right) \middle| F_1 \right] \right\}$$

$$= \frac{x\%}{0.9 S_1} \times c_1\left(S_1; X = 0.9 S_1; T = 2y\right)$$

$$= \frac{x\%}{0.9} \times c_1\left(1; X = 0.9; T = 2y\right)$$

$$RV_0 = \frac{x\%}{0.9} \times c_1(1; X = 0.9; T = 2y) \times e^{-4\% \times 1}.$$

$$c_1(1; X = 0.9; T = 2y) = 1 \times e^{-1.98\% \times (2-1)} \times N(d_1) - 0.9 \times e^{-r(1,2) \times (2-1)} \times N(d_2)$$

$$r(1,2): \quad e^{4.5\% \times 2} = e^{4\% \times 1} \times e^{r(1,2) \times (2-1)} \Leftrightarrow r(1,2) = \frac{4.5\% \times 2 - 4\% \times 1}{2-1} \cong 5\%.$$

$$N(d_1) = N\left[\frac{\ln\left(1/0.9\right) + \left(5\% - 1.98\% + \frac{(0.25)^2}{2}\right)}{0.25}\right]$$

$$\cong N(0.67) = 0.7486.$$

$$\begin{aligned} N(d_2) &= N(0.67 - 0.25) \\ &= N(0.42) \\ &= 0.6628. \end{aligned}$$

$$c_1(1; X = 0.9; T = 2y) = 1 \times e^{-1.98\% \times (2-1)} \times 0.7486 - 0.9 \times e^{-5\% \times (2-1)} \times 0.6628 \cong 0.1665.$$

$$RV_0 = \frac{x\%}{0.9} \times 0.1665 \times e^{-4\% \times 1}.$$

Para que a emissão possa ser feita ao par e com uma margem de 1%,

$$100\% - 1\% = 100\% \times e^{-4.5\% \times 2} + \frac{x\%}{0.9} \times 0.1665 \times e^{-4\% \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x\% \cong 42.80\%$$

e)

Estratégia de hedging (assumindo taxas de juro, dividend yield e volatilidades constantes:

i) Depósito a 2 anos no valor de EUR50,000,000 $\times e^{-4.5\% \times 2}$;

ii)

ii.1) Depósito a 1 ano no valor de EUR50,000,000x $\frac{42.80\%}{0.9} \times 0.1665 \times e^{-4\% \times 1}$;

ii.2) Daqui a 1 ano, utilizar o valor acumulado do depósito. i.e. EUR50,000,000x $\frac{42.80\%}{0.9} \times 0.1665$ para comprar European calls com vencimento no ano 2 e strike igual a 90% da cotação spot do índice daqui a 1 ano.