PRODUTOS ESTRUTURADOS E INOVAÇÃO FINANCEIRA 2004-2005
PÓS-GRADUAÇÃO EM MERCADOS E ACTIVOS FINANCEIROS
EXAME - Resolução
14/06/05 **Duração: 2.5 horas**

CASO 1

a) Admita vender uma down-and-out call e uma down-and-in call sobre igual subjacente, com igual strike, igual data de vencimento, igual barreira e igual rebate. Defina a estratégia de static hedging a adoptar.

$$c_T^{do} = \begin{cases} [S_T - X]^+ \Leftarrow S_u > H, \forall u \in [t,T] \\ R \Leftarrow else \end{cases}$$

$$c_T^{di} = \begin{cases} [S_T - X]^+ \Leftarrow else \\ R \Leftarrow S_u > H, \forall u \in [t,T] \end{cases}$$

Portanto,

$$c_T^{do} + c_T^{di} = [S_T - X]^+ + R$$

$$c_t^{do} + c_t^{di} = c_t(S_t; X; T) + R \times P(t,T)$$

Estratégia de static hedging:

- Comprar call standard sobre igual subjacente, com igual strike e igual data de vencimento;
- Efectuar depósito no valor do present value do rebate.

b) Comente a seguinte afirmação: "Uma put standard pode ser decomposta numa carteira de opções binárias". Justifique.

Afirmação verdadeira. Com efeito,

$$c_T(S_T; X; T) = \begin{cases} S_T - X \Leftarrow S_T \geq X \\ 0 \Leftarrow else \end{cases}$$

$$c_T(S_T; X; T) = -\begin{cases} X \Leftarrow S_T \geq X \\ 0 \Leftarrow else \end{cases} + \begin{cases} S_T \Leftarrow S_T \geq X \\ 0 \Leftarrow else \end{cases}$$

$$c_T(S_T; X; T) = -c_T^d(M = X; S_T; X; T) + c_T^A(M = 1; S_T; X; T)$$

Portanto, uma posiçãp long standard call é equivalente a:

- Uma posição short cash-or-nothing call com contract size igual ao strike; e

- Uma posição long asset-or-nothing call.

c) Em que condições é possível efectuar o static hedging de uma opção asiática mediante a compra de opções standard?

Quando apenas falta uma observação para o cálculo da média final.

d) Comente a seguinte afirmação: "O modelo de Merton não permite avaliar um produto estruturado associado à taxa de valorização de um cabaz de índices bolsistas". Justifique.

Afirmação verdadeira. Estando a remuneração variável ancorada à taxa de valorização do cabaz, a mesma pode ser avaliada como sendo uma call europeia sobre o cabaz. Contudo, a utilização do modelo de Merton para avaliar tal call pressupõe que o cabaz possui uma distribuição lognormal, o que é inconsistente com a assumpção da distribuição lognormal para cada índice..

CASO 2

a)

Trata-se de um Quanto.

$$r: \quad e^{r\times 3/12} = 1 + 2.125\% \times 3/12 \Rightarrow r = \frac{12}{3}\ln\left(1 + 2.125\% \times 3/12\right) \cong 2.119\%.$$

$$r_f: \quad e^{r_f\times 3/12} = 1 + 3\% \times 3/12 \Rightarrow r_f = \frac{12}{3}\ln\left(1 + 3\% \times 3/12\right) \cong 2.989\%.$$

$$q^* = 2.119\% - 2.989\% + 2\% - (-0.1)\times 20\% \times 10\% \cong 1.331\%.$$

$$S_{2,1} = 6{,}483.06 \times \exp\left\{\left[2.119\% - 1.331\% - \frac{(0.2)^2}{2}\right]\times\frac{0.5}{12} + (-0.02798)26 \times 0.2 \times \sqrt{\frac{0.5}{12}}\right\}$$

$$\cong 6{,}473.82.$$

$$\max_{i=1,\ldots,6}\left(S_{i,8}\right) = 7{,}616.09 > 6{,}800 \Rightarrow \quad V_{6,8} = \max(7{,}616.09 - 6{,}500;0) = 1{,}116.09.$$

$$\left(V_{6,8}\right)^2 = (1{,}116.09)^2 \cong 1{,}245{,}646.96.$$

b)

$$\hat{V}_0 = e^{-2.119\%\times 0.25} \times \frac{607.04 + 1{,}116.09 + 516.65}{10}$$
$$= e^{-3.47\%\times 0.5} \times \frac{2{,}239.78}{10}$$
$$\cong 222.79.$$

368,497.46 + 1,245,646.96 + 266,931.8 = 1,881,076.23

$$\sigma\left(\hat{V}_0\right) = \frac{e^{-2.119\%\times 0.25}}{\sqrt{10}} \times \sqrt{\frac{1{,}881{,}076.23 - \left(2{,}239.78\right)^2 / 10}{10-1}} \cong 123.15.$$

c)

Valor actual do depósito bancário:

$$B_0 = \frac{100\%}{1 + 2.125\% \times 3/12} + RV_0.$$

Por seu turno,

$$RV_{3M} = 50\% \times \max\left(\frac{\overline{S}_{12M} - 6{,}450}{6{,}450}; 0\%\right)$$

$$= \frac{50\%}{6{,}450} \times \max\left(\frac{9\overline{S}_{9M} + 3\overline{S}_{3M}}{12} - 6{,}450; 0\right)$$

$$= \frac{50\%}{6{,}450} \times \frac{3}{12} \times \max\left[\overline{S}_{3M} - \left(\frac{12}{3} \times 6{,}450 - \frac{9}{3} \times 6{,}400\right); 0\right]$$

$$= \frac{50\%}{6{,}450} \times \frac{3}{12} \times \max\left[\overline{S}_{3M} - 6{,}600; 0\right]$$

$$= \frac{50\%}{6{,}450} \times \frac{3}{12} \times c_{3M}^{A}\left(\overline{S}_{3M}; X = 6{,}600; T = 3M\right)$$

sendo
$\overline{S}_{12M} \equiv$ média aritmética simples dos 12 meses;
$\overline{S}_{9M} \equiv$ média aritmética simples dos últimos 9 meses; e
$\overline{S}_{3M} \equiv$ média aritmética simples dos últimos 3 meses.

Portanto,

$$RV_0 = \frac{50\%}{6{,}450} \times \frac{3}{12} \times c_0^A\left(\overline{S}_{3M}; X = 6{,}600; T = 3M\right).$$

Média em falta = (6,398.77+6,593.32+6,461.72)/3 = 6,484.61.

O quadro seguinte resume a avaliação da anterior average price call:

X	6,600.00	
j	Média 3 meses	**$V_{T,j}$**
1	6,257.78	0.00
2	6,574.08	0.00
3	6,191.94	0.00
4	5,810.35	0.00
5	6,038.88	0.00
6	6,412.08	0.00
7	6,907.35	307.35
8	7,216.28	616.28
9	6,554.99	0.00
10	6,484.61	0.00
	Sum	923.64

$$RV_0 = \frac{50\%}{6{,}450} \times \frac{3}{12} \times \left(\frac{923.64}{10} \times e^{-2.119\% \times 0.25}\right)$$

$$= \frac{50\%}{6{,}450} \times \frac{3}{12} \times 91.88$$

$$\cong 0.18\%.$$

Em suma,

$$B_0 = 99.47\% + 0.18\% = 99.65\%.$$

CASO 3

a)

$$B_0 = 100\% \times e^{-2.5\% \times 1} + RV_0.$$

$$RV_1 = \begin{cases} 15\% \Leftarrow E_1 > 3{,}300 \vee E_1 < 2{,}700 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= 15\% - \begin{cases} 15\% \Leftarrow E_1 \leq 3{,}300 \wedge E_1 \geq 2{,}700 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= 15\% - 15\% \times RD_1\left(E_1, X_a = 2{,}700; X_b = 3{,}300; T = 1Y; M = 1\right).$$

Portanto,

$$RV_0 = 15\% \times e^{-2.5\% \times 1} - 15\% \times RD_1\left(E_1, X_a = 2{,}700; X_b = 3{,}300; T = 1Y; M = 1\right)$$
$$= 15\% \times e^{-2.5\% \times 1} - 15\% \times e^{-2.5\% \times 1} \times \left\{N\left[d_2^M(2{,}700)\right] - N\left[d_2^M(3{,}300)\right]\right\}.$$

$$N\left[d_2^M(2{,}700)\right] = N\left[\frac{\ln\left(3{,}000/2{,}700\right) + \left(2.5\% - 1\% - (0.15)^2/2\right) \times 1}{0.15 \times \sqrt{1}}\right]$$

$$\cong N(0.7274) = 0.7665.$$

$$N\left[d_2^M(3{,}300)\right] = N\left[\frac{\ln\left(3{,}000/3{,}300\right) + \left(2.5\% - 1\% - (0.15)^2/2\right) \times 1}{0.15 \times \sqrt{1}}\right]$$

$$\cong N(-0.6104) = 0.2708.$$

$$RV_0 = 15\% \times e^{-2.5\% \times 1} - 15\% \times e^{-2.5\% \times 1} \times \{0.7665 - 0.2708\}.$$

$$= 15\% \times e^{-2.5\% \times 1} - 15\% \times 0.4835$$

$$= 7.38\%$$

$$B_0 = 97.53\% + 7.38\% \cong 104.91\% > 100\% \Rightarrow \text{ Investir.}$$

b)

$$B_0 = 100\% \times e^{-2.5\% \times 1} + RV_{6M}(0) + RV_{12M}(0).$$

$$RV_{6M}(6M) = \begin{cases} 50\% \times \dfrac{3{,}000 - E_{6M}}{3{,}000} \Leftarrow E_{6M} \le 2{,}700 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases} = \frac{50\%}{3{,}000} \times \begin{cases} 3{,}000 - E_{6M} \Leftarrow E_{6M} \le 2{,}700 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$RV_{6M}(6M) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \left(\begin{cases} 2{,}700 - E_{6M} \Leftarrow E_{6M} \le 2{,}700 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases} + \begin{cases} 300 \Leftarrow E_{6M} \le 2{,}700 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases} \right)$$

$$RV_{6M}(6M) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \left(p_{6M}(E_{6M}; X = 2{,}700; T = 6M) + p_{6M}^{d}(M = 300; E_{6M}; X = 2{,}700; T = 6M) \right)$$

Portanto,

$$RV_{6M}(0) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \left(p_0(E_0; X = 2{,}700; T = 6M) + p_0^{d}(M = 300; E_0; X = 2{,}700; T = 6M) \right)$$

$$RV_{6M}(0) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \left[50.13 + 300 \times e^{-2.25\% \times 0.5} \times N\left[d_2^{M}(-2{,}700) \right] \right]$$

$$RV_{6M}(0) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \left[50.13 + 300 \times e^{-2.25\% \times 0.5} \times (1 - 0.7665) \right] \cong 1.99\%.$$

Relativamente ao 2º cupão,

$$RV_{12M}(12M) = 50\% \times \begin{cases} \dfrac{E_{6M} - E_{12M}}{E_{6M}} \Leftarrow E_{12M} < E_{6M} \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases} = \frac{50\%}{E_{6M}} \times \begin{cases} E_{6M} - E_{12M} \Leftarrow E_{12M} < E_{6M} \\ 0 \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= \frac{50\%}{E_{6M}} \times p_{12M}(E_{12M}; X = E_{6M}; T = 12M)$$

$$RV_{12M}(6M) = \frac{50\%}{E_{6M}} \times p_{6M}(E_{6M}; X = E_{6M}; T = 12M) = 50\% \times p_{6M}(1; X = 1; T = 12M)$$

Consequentemente,

$$RV_{12M}(0) = 50\% \times p_{6M}(1; X = 1; T = 12M) \times e^{-2.25\% \times 0.5}.$$

A anterior *put* pode ser avaliada via modelo de Merton:

$$p_{6M}(1; X = 1; T = 12M) = -e^{-1\% \times (1-0.5)} \times N\left(-d_1^M\right) + e^{-r(6M,12M) \times (1-0.5)} \times N\left(-d_2^M\right).$$

Aproximando as taxas *spot* futuras via taxas *forward*,

$$e^{2.5\% \times 1} = e^{2.25\% \times 0.5} \times e^{r(6M,12M) \times 0.5} \Rightarrow r(6M,12M) \cong 2.75\%.$$

$$N\left(d_1^M\right) = N\left[\frac{\ln\left(\frac{1}{1}\right) + \left(2.75\% - 1\% + \frac{(0.15)^2}{2}\right) \times 0.5}{0.15 \times \sqrt{0.5}}\right]$$
$$= N(0.1355) \cong 0.5539.$$

$$N\left(d_2^M\right) = N\left(0.1355 - 0.15 \times \sqrt{0.5}\right)$$
$$= N(0.0295) \cong 0.5118.$$

Portanto,

$$p_{6M}(1; X = 1; T = 12M) = -e^{-1\% \times (1-0.5)} \times (1 - 0.5539) + e^{-2.75\% \times (1-0.5)} \times (1 - 0.5118) \cong 0.0377.$$

$$RV_{12M}(0) = 50\% \times 0.0377 \times e^{-2.25\% \times 0.5} \cong 1.86\%.$$

Concluindo,

$$B_0 = 97.53\% + 1.99\% + 1.86\% = 101.38\%.$$

Uma vez que a emissão é efectuada a 102% do par, então:

Margem de intermediação = 102% - 101.38% = 0.62%.

c)

$$K_p = \frac{p_0(E_0; X = 3{,}300; T = 12M)}{p_0^d(M = 1; E_0; X = 3{,}300; T = 12M)}$$

$$K_p = \frac{335.02}{p_0^d(M = 1; E_0; X = 3{,}300; T = 12M)}$$

$$K_p = \frac{335.02}{e^{-2.5\%\times 1} \times N\left[-d_2^M(3{,}300)\right]}$$

$$K_p = \frac{335.02}{e^{-2.5\%\times 1} \times (1 - 0.2708)} \cong 471.07$$

d)

$\underline{B_0 = 100\% \times e^{-2.5\%\times 1} + RV_{12M}(0).}$

$$RV_{12M}(12M) = \begin{cases} 50\% \times \max\left(\dfrac{E_{12M} - 3{,}000}{3{,}000}; 0\%\right); ou \\ 50\% \times \max\left(\dfrac{3{,}000 - E_{12M}}{3{,}000}; 0\%\right) \end{cases}$$

$$RV_{12M}(12M) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \begin{cases} \max(E_{12M} - 3{,}000; 0); ou \\ \max(3{,}000 - E_{12M}; 0) \end{cases}$$

$$RV_{12M}(12M) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \begin{cases} c_{12M}(E_{12M}; X = 3{,}000; T = 12M); ou \\ p_{12M}(E_{12M}; X = 3{,}000; T = 12M) \end{cases}$$

$$RV_{12M}(6M) = \frac{50\%}{3{,}000} \times \max\left[c_{6M}(E_{6M}; X = 3{,}000; T = 12M); p_{6M}(E_{6M}; X = 3{,}000; T = 12M)\right]$$

$$RV_{12M}(6M) = \frac{50\%}{3{,}000} \times AYLI_{6M}(E_{6M}; X = 3{,}000; T = 12M)$$

Portanto,

$$RV_{12M}(0) = \frac{50\%}{3{,}000} \times AYLI_0\left(E_0; X = 3{,}000; T = 12M\right)$$

$$RV_{12M}(0)$$
$$= \frac{50\%}{3{,}000} \times \left[c_0\left(E_0; X = 3{,}000; T = 12M\right) + e^{-1\% \times (1-0.5)} \times p_0\left(E_0; X = 3{,}000 \times e^{-(2.75\%-1)\% \times (1-0.5)}; T = 6M\right)\right]$$

$$RV_{12M}(0)$$
$$= \frac{50\%}{3{,}000} \times \left[199.24 + e^{-1\% \times (1-0.5)} \times 104.34\right] \cong 5.05\%$$

Portanto,

$B_0 = 97.53\% + 5.05\% = 102.58\% > 100\% \Rightarrow$ Investir.