OPÇÕES FINANCEIRAS - Exame (resolução)

12/04/2006

1. (a) Atendendo a que

$$dS_t = (r-q)\,S_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t,$$

e aplicando o lema de Itô a $\ln S_t$, então

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\int_t^T d\tilde{W}_u, \qquad (1)$$

sendo $\tau := T - t$.

Na medida de probabilidade $\mathbb{Q}$, o valor descontado (à taxa de juro sem risco r) da opção é um martingale e, portanto,

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(V_T \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= e^{-r\tau}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)\mathbb{1}_{\left\{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)>0\right\}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \qquad (2) \end{aligned}$$

Visto que o integral de Itô $\int_t^T d\tilde{W}_u$ possui uma distribuição normal com média zero e variância igual a τ, as equações (1) e (2) podem ser combinadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r\tau}\int_0^\infty \left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma w\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\tau}\right)dw \\ &= e^{-r\tau}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\left[1-\Phi\left(\frac{0-0}{\sqrt{\tau}}\right)\right] + \frac{\sigma e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_0^\infty w\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\tau}\right)dw \\ &= e^{-r\tau}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\tau}{2} + \frac{\sigma e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}}(-\tau)\int_0^\infty\left(-\frac{w}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\tau}\right)dw \\ &= e^{-r\tau}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\tau}{2} + \frac{\sigma e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi\tau}}(-\tau)\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2}{\tau}\right)\right]_0^\infty \\ &= e^{-r\tau}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\tau}{2} - \frac{\sigma e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\tau}\,(0-1) \\ &= e^{-r\tau}\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\tau}{2} + \frac{\sigma e^{-r\tau}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

(b) Aplicando o lema de Itô a

$$X_t := S_t^2, \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} dX_t &= 2S_t dS_t + \frac{1}{2}2d\left\langle S,S\right\rangle_t \\ &= 2(r-q)\,S_t^2 dt + 2\sigma S_t^2 d\tilde{W}_t + \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left[2(r-q)+\sigma^2\right]X_t dt + 2\sigma X_t d\tilde{W}_t. \qquad (4) \end{aligned}$$

Com base na equação (4) e aplicando novamente o lema de Itô, então

$$\begin{aligned} d\ln X_t &= \frac{1}{X_t}dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)d\left\langle X,X\right\rangle_t \\ &= \left[2(r-q)+\sigma^2\right]dt + 2\sigma d\tilde{W}_t - 2\sigma^2 dt \\ &= \left[2(r-q)-\sigma^2\right]dt + 2\sigma d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\ln X_T - \ln X_t = \left[2\left(r-q\right)-\sigma^2\right]\left(T-t\right)+2\sigma\int_t^T d\tilde{W}_u,$$

e utilizando a equação (3):

$$S_T^2 = S_t^2 \exp\left\{\left[2\left(r-q\right)-\sigma^2\right]\left(T-t\right)+2\sigma\int_t^T d\tilde{W}_u\right\}. \tag{5}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\left.S_T^2\right|\mathcal{F}_t\right) &= S_t^2 \exp\left\{\left[2\left(r-q\right)-\sigma^2\right]\left(T-t\right)\right\}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left.\exp\left(2\sigma\int_t^T d\tilde{W}_u\right)\right|\mathcal{F}_t\right] \\
&= S_t^2 \exp\left\{\left[2\left(r-q\right)-\sigma^2\right]\left(T-t\right)+\frac{1}{2}4\sigma^2\left(T-t\right)\right\} \\
&= S_t^2 \exp\left\{\left[2\left(r-q\right)+\sigma^2\right]\left(T-t\right)\right\}.
\end{aligned}$$

(c) A cotação forward da acção no momento t para entrega n momento $T \geq t$ é igual a

$$F_t = S_t \exp\left[\left(r-q\right)\left(T-t\right)\right]. \tag{6}$$

Então

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\left.F_T\right|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\left.S_T\right|\mathcal{F}_t\right). \tag{7}$$

Utilizando a equação (1),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\left.F_T\right|\mathcal{F}_t\right) &= S_t \exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T-t\right)\right]\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left.\exp\left(\sigma\int_t^T d\tilde{W}_u\right)\right|\mathcal{F}_t\right] \\
&= S_t \exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T-t\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\left(T-t\right)\right] \\
&= S_t \exp\left[\left(r-q\right)\left(T-t\right)\right] \\
&= F_t
\end{aligned}$$

(a) Para pré-fixar um contra-valor em USD máximo, a estratégia natural (mais simples) consiste em comprar 4 (4M/1M) calls sobre a taxa de câmbio EUR/USD e com vencimento a 6 meses.

Desprezando desfazamentos temporais, o exercício das calls permite fixar um preço de compra (máximo) de cada EUR igual a $(K_c + c)$, com um custo de cobertura igual a c por EUR:

Long Kc call

Kc	c	Kc+c
\$1.10	\$0.095	\$1.195
\$1.20	\$0.029	\$1.229
\$1.30	\$0.004	\$1.304

O strike de $1.10 permite fixar um preço de compra máximo por EUR não superior a $1.225. Todavia, o custo de cobertura por é superior a $0.05 por EUR.

Para reduzir o custo da cobertura, é necessário vender 4 puts com strike inferior ao preço de exercicio das calls. Ou seja, é necessário construir um short range forward:

Long Kc call + Short Kp put

Kc	Kp	c	p	-c+p	Kc+c-p
$1.20	**$1.10**	$0.029	$0.005	-$0.024	$1.224
$1.30	$1.10	$0.004	$0.005	$0.001	$1.299
$1.30	$1.20	$0.004	$0.038	$0.033	$1.267

Portanto, a compra de 4 calls com strike $1.20 e a venda de 4 puts com strike $1.10 permite fixar um preço de compra máximo igual a $1.224 (<$1.225) com um custo de cobertura de apenas $0.025 (<$0.05) por EUR.

O contra-valor máximo, por EUR, proporcionado por tal estratégia é igual a $e4M \times \$1.224$.

(b) O objectivo é vender USD daqui a 6 meses, o que é equivalente a comprar EUR. Garantir um preço de venda minimo para USD é equivalente a garantir um preço de compra máximo para EUR. Para o efeito, é necessário comprar calls EUR/USD.

Designando por CS_{EUR} o contract size das calls e despresando desfazamentos temporais, o exercicio das mesmas implica os seguintes fluxos financeiros (na óptica da empresa ACN): recebimento do contract size CS_{EUR}; pagamento de $CS_{EUR} \times (K_c + c)$. Portanto, para vender a totalidade dos US$10M daqui a 6 meses é necessário definir um contract size igual a CS_{EUR} tal que $CS_{EUR} \times (K_c + c) = US\$10M$.

Kc	c	Kc+c	$10M/(Kc+c)
$1.10	$0.095	$1.195	**8,370,645.72 €**
$1.20	$0.029	$1.229	8,137,268.04 €
$1.30	$0.004	$1.304	7,665,876.67 €

Em resumo, a compra de uma call EUR/USD com contract size igual a €8,370,645.72 e strike igual a $1.10 permite trocar, daqui a 6 meses, os $10M por mais de €8,200,000.

(c) A estratégia long straddle consiste na assumpção das seguintes posições: long K put e long K call. Consequentemente, as alternativas disponiveis limitam-se a:

K	c	p	K-c-p	K+c+p	c+p
$1.10	$0.095	$0.005	$1.000	$1.200	$0.100
$1.20	$0.029	$0.038	$1.133	$1.267	$0.067
$1.30	$0.004	$0.112	$1.184	$1.416	$0.116

A estratégia a escolher consiste em seleccionar K=$1.20, pois a mesma possui um custo de implementação (por EUR) igual a $0.067 (<$0.080).

Os pontos de breakeven são dados por:

i. K-p-c = $1.133; e

ii. K+p+c = \$1.267.

(a) Modelo de Merton:

$$p_t(S,K,T) = -S_t e^{-q\tau}\Phi(-d_+) + e^{-r\tau} K\Phi(-d_-).$$

Taxa de juro sem risco em regime de capitalização contínua:

$$\begin{aligned} r &= \frac{360}{90} \times \ln\left(1 + 3.4\% \times \frac{90}{360}\right) \\ &\cong 3.339\%. \end{aligned}$$

Volatilidade (anualizada) do índice DAX:

$$\begin{aligned} \sigma &= 4.16\% \times \sqrt{52} \\ &\cong 30\%. \end{aligned}$$

i. Portanto,

$$p_0 = -6,500 \times \exp(0) \times \Phi(-d_+) + 6,400 \times \exp\left(-3.339\% \times \frac{90}{360}\right) \times \Phi(-d_-),$$

sendo:

$$\begin{aligned} d_+ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{6,500}{6,400}\right) + \left(3.339\% - 0\% + \frac{0.3^2}{2}\right) \times \frac{90}{360}}{0.3 \times \sqrt{\frac{90}{360}}} \\ &\cong 0.234 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{\tau} \\ &= 0.234 - 0.3 \times \sqrt{\frac{90}{360}} \\ &\cong 0.084. \end{aligned}$$

Utilizando uma tabela da normal reduzida,

$$\begin{aligned} \Phi(-d_+) &\approx \Phi(-0.23) \\ &= 1 - 0.5910 \\ &= 0.4090 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi(-d_-) &\approx \Phi(-0.08) \\ &= 1 - 0.5319 \\ &= 0.4681. \end{aligned}$$

Em suma,

$$
\begin{aligned}
p_0 &= -6,500 \times 0.4090 + 6,400 \times \exp\left(-3.339\% \times \frac{90}{360}\right) \times 0.4681 \\
&\cong 312.26.
\end{aligned}
$$

I.e. $312.26 \times e100 = e31,226$.

(b) Valor do contrato daqui a 90 dias:

$$
V_T = e100 \times \mathbb{1}_{\{S_T<K\}},
$$

sendo S_T a cotação do DAX daqui a 90 dias e $K = 6,400$.
Usando risk-neutral valuation, o valor actual do contrato é igual a

$$
\begin{aligned}
V_0 &= e100 \times \exp\left(-3.339\% \times \frac{90}{360}\right) \times \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{1}_{\{S_T<K\}} \middle| \mathcal{F}_0\right) \\
&= e100 \times \exp\left(-3.339\% \times \frac{90}{360}\right) \times \mathbb{Q}\left(S_T < K \middle| \mathcal{F}_0\right).
\end{aligned}
$$

Para calcular a probabilidade $\mathbb{Q}\left(S_T < K \middle| \mathcal{F}_0\right)$, consideremos a solução associada ao geometric Brownian motion assumido pelo modelo de Merton:

$$
S_T = 6,500 \times \exp\left[\left(3.339\% - 0\% - \frac{0.3^2}{2}\right) \times \frac{90}{360} + 0.3 \times \int_0^T d\tilde{W}_u\right].
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q}\left(S_T < K \middle| \mathcal{F}_0\right) \\
= \; &\mathbb{Q}\left\{6,500 \times \exp\left[\left(3.339\% - 0\% - \frac{0.3^2}{2}\right) \times \frac{90}{360} + 0.3 \times \int_0^T d\tilde{W}_u\right] < 6,400 \middle| \mathcal{F}_0\right\} \\
= \; &\mathbb{Q}\left\{\int_0^T d\tilde{W}_u < \frac{\ln\left(\frac{6,400}{6,500}\right) - \left(3.339\% - 0\% - \frac{0.3^2}{2}\right) \times \frac{90}{360}}{0.3} \middle| \mathcal{F}_0\right\}.
\end{aligned}
$$

Visto que $\left(\int_0^T d\tilde{W}_u\right)$ tem uma distribuição normal com média zero e variância igual a $\frac{90}{360}$, então

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q}\left(S_T < K \middle| \mathcal{F}_0\right) \\
= \; &\Phi\left\{\frac{\ln\left(\frac{6,400}{6,500}\right) - \left(3.339\% - 0\% - \frac{0.3^2}{2}\right) \times \frac{90}{360}}{0.3\sqrt{\frac{90}{360}}}\right\} \\
= \; &\Phi\left(-d_-\right) \\
\cong \; &0.4681.
\end{aligned}
$$

Em resumo,

$$
\begin{aligned}
V_0 &= e100 \times \exp\left(-3.339\% \times \frac{90}{360}\right) \times 0.4681 \\
&\cong e46.42.
\end{aligned}
$$

(c) $S_{2,0} =?$
$d = \frac{5{,}960.77}{6{,}500} \cong 0.9170$. Portanto,

$$S_{2,0} = 5,960.77 \times 0.9170 \cong \mathbf{5,466.27}.$$

Qual é o strike K?

$$2,028.42 = 8,428.42 - K \Longrightarrow K = 6,400$$

$C_{3,2} =?$

$$\begin{aligned} C_{3,2} &= (7,088.01 - 6,400)^+ \\ &= \mathbf{688.01}. \end{aligned}$$

$C_{0,0} = \max\left\{6,500 - 6,400; \exp\left(-3.339\% \times \frac{\frac{90}{360}}{3}\right)[q \times 835.18 + (1-q) \times 167.26]\right\}$.
Uma vez que não existem dividendos,

$$\begin{aligned} q &= \frac{\exp\left(3.339\% \times \frac{\frac{90}{360}}{3}\right) - 0.9170}{(0.9170)^{-1} - 0.9170} \\ &\cong 0.4944. \end{aligned}$$

Em suma,

$$\begin{aligned} C_{0,0} &= \max\left\{100; \exp\left(-3.339\% \times \frac{\frac{90}{360}}{3}\right)[0.4944 \times 835.18 + (1-0.4944) \times 167.26]\right\} \\ &= \max(100; 496.12) \\ &\cong \mathbf{496.12}. \end{aligned}$$

(d) Utilizando a equação (25) dos handouts,

i. $(0,0)$
Nº de certificados de depósito a comprar/vender:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{835.18 - 167.26}{7,088.01 - 5,960.77} \\ &\cong 0.5925. \end{aligned}$$

É então necessário **comprar** $0.5925 \times 10 \times \frac{100}{1} = \mathbf{592.5}$ **certificados**.
Contrair um financiamento no valor de $B\psi = 592.5 \times 6,500 \times EUR1 - 10 \times 496.12 \times EUR100 = \mathbf{EUR3,355,130}$.

ii. $(1,1)$
Posição a assumir sobre os certificados de depósito:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1,347.00 - 339.23}{7,729.21 - 6,500.00} \\ &\cong 0.8199. \end{aligned}$$

É então necessário **comprar** mais $(0.8199 - 0.5925) \times 10 \times \frac{100}{1} = 227.40$ **certificados**. Passamos assim a deter uma posição longa sobre um total de $0.8199 \times 10 \times \frac{100}{1} = 819.9$ certificados.
Reforçar o financiamento até ao valor de

$$\begin{aligned} B\psi &= EUR3,355,130 \times \exp\left(3.339\% \times \frac{\frac{90}{360}}{3}\right) + 227.40 \times 7,088.01 \times EUR1 \\ &\cong \mathbf{EUR4,976,292.12}. \end{aligned}$$

iii. $(2,1)$
Posição a assumir sobre os certificados de depósito:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{688.01 - 0.00}{7,088.01 - 5,960.77} \\ &\cong 0.6103. \end{aligned}$$

É então necessário **vender** $(0.8199 - 0.6103) \times 10 \times \frac{100}{1} = 209.60$ **certificados**. Passamos assim a deter uma posição longa sobre um total de $0.6103 \times 10 \times \frac{100}{1} = 610.3$ certificados.
Reduzir o financiamento até ao valor de

$$\begin{aligned} B\psi &= EUR4,976,292.12 \times \exp\left(3.339\% \times \frac{\frac{90}{360}}{3}\right) - 209.60 \times 6,500 \times EUR1 \\ &\cong \mathbf{EUR3,627,757.94}. \end{aligned}$$

iv. $(3,2)$
Uma vez que a call termina ITM ($S_{3,2} = 7,088.01 > K$), é necessário comprar mais $(1 - 0.6103) \times 10 \times \frac{100}{1} = 389.70$ **certificados**. Tal implica um investimento adicional de $389.70 \times 7,088.01 \times EUR1 = EUR2,762,197.50$, o que associado ao reembolso do financiamento perfaz um cash-out flow total de

$$\begin{aligned} & EUR3,627,757.94 \times \exp\left(3.339\% \times \frac{\frac{90}{360}}{3}\right) + EUR2,762,197.50 \\ &= EUR6,400,063.73. \end{aligned}$$

Este pagamento é coberto (salvo arredondamentos) via recebimento do strike, i.e. $6,400 \times EUR100 \times 10 = EUR6,400,000$.