PRODUTOS ESTRUTURADOS E INOVAÇÃO FINANCEIRA 2006/07
PÓS-GRADUAÇÃO EM MERCADOS E ACTIVOS FINANCEIROS
EXAME (resolução)

06/06/07 **Duração: 3 horas**

<u>CASO 1</u> (2x1.5=3 valores)

a) Comente a seguinte afirmação: "O *static hedging* de uma posição curta sobre uma *asset-or-nothing put* pode ser feito via transacção de *cash-or-nothing* e *standard European puts*". Justifique.

Afirmação verdadeira.

Via modelo de Merton, o fair value de uma put Europeia sobre o activo S, com strike X e vencimento no momento T é dado por:

$$p_t(S,X,T) = -S_t e^{-q(T-t)} N[-d_1(X)] + Xe^{-r(T-t)} N[-d_2(X)]$$

$$\Leftrightarrow S_t e^{-q(T-t)} N[-d_1(X)] = Xe^{-r(T-t)} N[-d_2(X)] - p_t(S,X,T)$$

$$\Leftrightarrow p_t^A(S,X,T;M=1) = p_t^d(S,X,T;M=X) - p_t(S,X,T).$$

I.e. posição longa em *asset-or-nothing put* equivale a uma posição longa numa *cash-or-nothing put* (com contract size igual ao strike) e a uma posição curta sobre a put Europeia standard.

b) Comente a seguinte afirmação: "Uma *Exchange put* Americana sobre uma acção A para troca com duas acções B pode ser avaliada como sendo uma *standard European put*". Justifique.

Afirmação apenas verdadeira se a *dividend yield* da acção B for igual a zero. De facto,

i) Uma *Exchange put* Americana sobre uma acção A para troca com duas acções B é equivalente a uma *Exchange call* Americana sobre duas acções B para troca com uma acção A;

ii) Sendo a *dividend yield* da acção B igual a zero, então a *Exchange call* Americana pode ser avaliada como sendo uma *Exchange call* Europeia;

iii) Uma *Exchange call* Europeia sobre duas acções B para troca com uma acção A é equivalente a uma *Exchange put* Europeia sobre uma acção A para troca com duas acções B.

c) Em que circunstâncias podemos avaliar uma *down-and-in put* com base no modelo de Merton?

Desde que:

i) não exista rebate; e

ii) O spot inicial esteja acima da barreira (S>H), a qual por seu turno é definida como sendo superior ao strike (H>X).

Deste modo, caso a put termine ITM isso significa necessariamente que a mesma também foi knocked-in.

<u>CASO 2</u> (6 valores)

a)

$$r: \quad e^{r\times 9/12} = 1 + 4.5\% \times 9/12 \Rightarrow r = \frac{12}{9}\ln\left(1 + 4.5\% \times 9/12\right) \cong 4.426\%.$$

$$q^* = 4.426\% - \frac{12}{9}\ln\left(1 + 5.5\% \times \frac{9}{12}\right) + 1\% + (-0.3)\times 0.2 \times 0.1 \cong -0.564\%.$$

$$S_{6,9} = 4{,}837.59 \times \exp\left\{\left[4.426\% - 0.564\% - \frac{(0.2)^2}{2}\right] \times \frac{1}{12} + (-1.55889)\times 0.2 \times \sqrt{\frac{1}{12}}\right\}$$
$$\Rightarrow S_{6,9} \cong 4{,}432.24.$$

$$S_{j=5}^{\max} = 5{,}206.28 < 5{,}500 \Rightarrow \mathrm{V}_{9,5} = \max(5{,}000 - 4{,}134.45; 0) = \quad 865.55.$$

$$S_{j=6}^{\max} = 5{,}621.52 > 5{,}500 \Rightarrow \mathrm{V}_{9,6} = 0.$$

b)

$$\hat{V}_0 = e^{-4.426\%\times 9/12} \times \frac{2{,}155.05 + 865.55}{10} \cong 292.20.$$

$$\sigma\left(V_{t,j}\right) = e^{-4.426\%\times 9/12}\sqrt{\frac{\left(2{,}155.05^2 + 865.55^2\right) - \frac{(2{,}155.05 + 865.55)^2}{10}}{9}} \cong 682.58.$$

$$\sigma\left(\hat{V}_0\right) = \frac{682.58}{\sqrt{10}} \cong 215.85.$$

c)

$$V_{t,8} = e^{-4.426\% \times 9/12} \times \max(5{,}851.50 - 5{,}500) \cong 340.02.$$

$$\hat{V}_0 = \frac{1{,}399.98 + 340.02 + 11.62}{10} \cong 175.16.$$

d)

$$V_{T,j} = \max\left(0; \frac{3 \times S^{ave} + 3 \times 5{,}100}{6} - 5{,}500\right),$$

onde S^{ave} designa a média das 3 últimas cotações.

Portanto,

$$\begin{aligned} V_{T,j} &= \max\left(0; \frac{3 \times S^{ave} + 3 \times 5{,}100}{6} - 5{,}500\right) \\ &= 0.5 \times \max\left[0; S^{ave} - (2 \times 5{,}500 - 5{,}100)\right] \\ &= 0.5 \times \max(0; S^{ave} - 5{,}900). \end{aligned}$$

Utilizando o quadro constante no enunciado da alínea c), basta agora avaliar uma call com strike igual a 5,900 pontos de índice e sobre a média dos 3 últimos preços. Há apenas uma simulação em que a call termina ITM e, portanto:

$$\hat{V}_0 = e^{-4.426\% \times 9/12} \times \frac{0.5 \times (6{,}947.23 - 5{,}900)}{10} \cong 50.65.$$

<u>CASO 3</u> (5 valores)

a)

$$K_c = \frac{c_0(S = 10{,}000; X = 10{,}000; T = 1y)}{c_0^d(S = 10{,}000; X = 10{,}000; T = 1y; M = 1)}$$

$$= \frac{1{,}066.67}{e^{-4\% \times 1} \times N[d_2(10{,}000)]}.$$

$$N\left[d_2(10{,}000)\right] = N\left[\frac{\ln\left(10{,}000/10{,}000\right) + \left(4\% - 1.98\% - \frac{(0.25)^2}{2}\right)}{0.25}\right]$$

$$\cong N(-0.04) = 1 - N(0.04) = 1 - 0.5160 = 0.4840.$$

Portanto,

$$K_c = \frac{1{,}072.84}{e^{-4\%\times 1} \times 0.484} \cong 2301.55.$$

b)

$$AYLIS_0 = c_0\left(S = 10{,}000; X = 10{,}000; T = 2y\right)$$

$$+ e^{-1.98\%\times(2-1)} p_0\left(S = 10{,}000; X = 10{,}000 e^{-(4\%-1.98\%)\times(2-1)} = 9{,}800; T = 1y\right)$$

Utilizando os dados do enunciado,

$$AYLIS_0 = 1{,}520.80 + e^{-1.98\%\times(2-1)} \times 774.24 \cong \quad 2{,}279.83\,.$$

c)

$$B_0 = 100\% \times e^{-4\%\times 1} + RV_0.$$

$$RV_{12M} = \begin{cases} 10\% \Leftarrow S_{12M} < 9{,}000 \vee S_{12M} > 11{,}000 \\ 0\% \Leftarrow 9{,}000 \le S_{12M} \le 11{,}000 \end{cases}$$

$$= 10\% - \begin{cases} 10\% \Leftarrow 9{,}000 \le S_{12M} \le 11{,}000 \\ 0\% \Leftarrow S_{12M} < 9{,}000 \vee S_{12M} > 11{,}000 \end{cases}$$

$$= 10\% - RD_{12M}\left(S_{12M}; X_a = 9{,}000; X_b = 11{,}000; T = 12M; M = 10\%\right)$$

Portanto,

$$RV_0 = e^{-4\%\times 1} \times 10\% - RD_0\left(S_0; X_a = 9{,}000; X_b = 11{,}000; T = 12M; M = 10\%\right)$$

$$= e^{-4\%\times 1} \times 10\% - 10\% \times e^{-4\%\times 1} \times \left\{N\left[d_2(9{,}000)\right] - N\left[d_2(11{,}000)\right]\right\}.$$

$$N\left[d_2(9{,}000)\right] = N\left[\frac{\ln\left(10{,}000/9{,}000\right) + \left(4\% - 1.98\% - \frac{(0.25)^2}{2}\right)}{0.25}\right]$$

$$\cong N(0.38) = 0.6480.$$

$$N\left[d_2(11{,}000)\right] = N\left[\frac{\ln\left(10{,}000/11{,}000\right) + \left(4\% - 1.98\% - \frac{(0.25)^2}{2}\right)}{0.25}\right]$$

$$\cong N(-0.43) = 1 - N(0.43) = 1 - 0.6664 = 0.3336.$$

$$RV_0 = e^{-4\%\times 1} \times 10\% - 10\% \times e^{-4\%\times 1} \times \left\{0.6480 - 0.3336\right\} \cong 6.61\%.$$

$$B_0 = 100\% \times e^{-4\%\times 1} + 6.61\% \cong 102.69\% > 100\% \Rightarrow \text{ Investir.}$$

d)

$$B_0 = 100\% \times e^{-4.5\%\times 2} + RV_0.$$

$$RV_{2y} = x\% \times \max\left(0\%; \frac{S_2 - 90\% S_1}{90\% S_1}\right)$$

$$= \frac{x\%}{0.9S_1} \times \max\left(0\%; S_2 - 0.9S_1\right)$$

$$= \frac{x\%}{0.9S_1} \times c_2\left(S_2; X = 0.9S_1; T = 2y\right)$$

$$RV_1 = e^{-r(1,2)\times(2-1)} E_1\left[\frac{x\%}{0.9S_1} \times c_2\left(S_2; X = 0.9S_1; T = 2y\right)\right]$$

$$= \frac{x\%}{0.9S_1} \times \left\{e^{-r(1,2)\times(2-1)} E_1\left[c_2\left(S_2; X = 0.9S_1; T = 2y\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{x\%}{0.9S_1} \times c_1\left(S_1; X = 0.9S_1; T = 2y\right)$$

$$= \frac{x\%}{0.9} \times c_1\left(1; X = 0.9; T = 2y\right)$$

$$RV_0 = \frac{x\%}{0.9} \times c_1\left(1; X = 0.9; T = 2y\right) \times e^{-4\%\times 1}.$$

$$c_1\left(1; X = 0.9; T = 2y\right) = 1 \times e^{-1.98\%\times(2-1)} \times N\left(d_1\right) - 0.9 \times e^{-r(1,2)\times(2-1)} \times N\left(d_2\right)$$

$$r(1,2): \quad e^{4.5\%\times 2} = e^{4\%\times 1} \times e^{r(1,2)\times(2-1)} \Leftrightarrow r(1,2) = \frac{4.5\% \times 2 - 4\% \times 1}{2-1} \cong 5\%.$$

$$N\left(d_1\right) = N\left[\frac{\ln\left(1/0.9\right) + \left(5\% - 1.98\% + \frac{(0.25)^2}{2}\right)}{0.25}\right]$$

$$\cong N(0.67) = 0.7486.$$

$$\begin{aligned} N\left(d_2\right) &= N(0.67 - 0.25) \\ &= N(0.42) \\ &= 0.6628. \end{aligned}$$

$$c_1\left(1; X = 0.9; T = 2y\right) = 1 \times e^{-1.98\%\times(2-1)} \times 0.7486 - 0.9 \times e^{-5\%\times(2-1)} \times 0.6628 \cong 0.1665.$$

$$RV_0 = \frac{x\%}{0.9} \times 0.1665 \times e^{-4\%\times 1}.$$

Para que a emissão possa ser feita ao par e com uma margem de 1%,

$$100\% - 1\% = 100\% \times e^{-4.5\% \times 2} + \frac{x\%}{0.9} \times 0.1665 \times e^{-4\% \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x\% \cong 42.80\%$$

e)

Estratégia de hedging (assumindo taxas de juro, dividend yield e volatilidades constantes:

i) Depósito a 2 anos no valor de EUR50,000,000 $\times e^{-4.5\% \times 2}$;

ii)

ii.1) Depósito a 1 ano no valor de EUR50,000,000x $\frac{42.80\%}{0.9} \times 0.1665 \times e^{-4\% \times 1}$;

ii.2) Daqui a 1 ano, utilizar o valor acumulado do depósito. i.e. EUR50,000,000x $\frac{42.80\%}{0.9} \times 0.1665$ para comprar European calls com vencimento no ano 2 e strike igual a 90% da cotação spot do índice daqui a 1 ano.