Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juro
Mestrado em Matemática Financeira 10/11
IBS e FCUL

Exame 1ª Época

20/Dez/11 Duração: 3h

Caso 1 Responda sussinta e objectivamente às duas questões seguintes: (2x2.0V)

a) No modelo CIR,

$$dr_t = k(\theta - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}},$$

demonstra-se que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\lambda r_t}\exp\left(-\mu\int_{t_0}^{t} r_s ds\right)|\mathcal{F}_{t_0}\right] = \exp\left[\phi_{\lambda,\mu}(t-t_0) - r_{t_0}\psi_{\lambda,\mu}(t-t_0)\right],$$

onde

$$\psi_{\lambda,\mu}(t-t_0) := \frac{\lambda\left[h+k+(h-k)e^{h(t-t_0)}\right]+2\mu\left[e^{h(t-t_0)}-1\right]}{\sigma^2\lambda\left(e^{h(t-t_0)}-1\right)+h-k+(k+h)e^{h(t-t_0)}},$$

$$\phi_{\lambda,\mu}(t-t_0) := \frac{2k\theta}{\sigma^2}\ln\left[\frac{2he^{\frac{(k+h)(t-t_0)}{2}}}{\sigma^2\lambda\left(e^{h(t-t_0)}-1\right)+h-k+(k+h)e^{h(t-t_0)}}\right], \tag{1}$$

e $h := \sqrt{k^2+2\sigma^2\mu}$. Obtenha a equação (1) através da solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial\phi_{\lambda,\mu}(t-t_0)}{\partial t} = -k\theta\psi_{\lambda,\mu}(t-t_0),$$

sujeita à condição terminal $\phi_{\lambda,\mu}(0) = 0$.

b) Com base no modelo de Vasiček (1977), determine o *fair value* (no momento t) de um futuro com vencimento no momento T, com um *contract size* igual a M, e sobre a Euribor $E(T, T+\delta)$ a vigorar entre os momentos T ($\geq t$) e $T+\delta$ (com $\delta > 0$). Para o efeito considere que o futuro é um $\mathbb{Q}$-martingale, que $P(T, T+\delta) = [1 + \delta \times E(T, T+\delta)]^{-1}$ e que o *payoff* terminal do futuro é dado por

$$F_T = M \times \delta \times [100\% - E(T, T+\delta)].$$

Caso 2 Considere um processo CEV especificado através da seguinte SDE:

$$dS_t = (r-q)\,S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Admita que $S = EUR10$, $\beta = -3$, $r = 2\%$, $q = 1\%$ e que a volatilidade da taxa de rentabilidade do activo subjacente é igual a 30% ao ano. Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 2.4 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a 3.6:

x	0.15000000	1.15058157	15.00000000
F(x)	0.0115144	0.91494212	0.95733085

Pretende-se que avalie uma *put* Europeia sobre o activo S, com *strike* igual a EUR8 e com maturidade igual a 6 meses. (3V)

Caso 3 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Heston (1993):

- Cotação spot da acção EVN= EUR10;
- *Dividend yield* do activo subjacente (em capitalização contínua) = 1%;
- Taxa de juro sem risco (em capitalização contínua) = 2%;
- Variância instantânea do activo subjacente (v) = 0.09;
- Velocidade de reversão para a média da volatilidade (k) = 0.5;
- Nível de longo prazo da variância instantânea (θ) = 0.04;
- Volatilidade da variância instantânea (σ) = 20%; e
- Coeficiente de correlação entre o spot e a variância instantânea (ρ) = -0.5.

O quadro seguinte sumariza a implementação das equações (173) e (174) dos apontamentos para um strike de EUR8, uma maturidade de 6 meses, e através de uma quadratura de Gauss-Laguerre com 15 pontos:

		$X = 8$	
w_i	ϕ_i	$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$
2.1823E-01	9.3308E-02	2.7297E-01	2.2728E-01
3.4221E-01	4.9269E-01	4.0426E-01	3.3679E-01
2.6303E-01	1.2156E+00	8.0392E-01	6.7185E-01
1.2643E-01	2.2699E+00	2.0747E+00	1.7504E+00
4.0207E-02	3.6676E+00	6.5722E+00	5.6724E+00
8.5639E-03	5.4253E+00	2.3283E+01	2.1142E+01
1.2124E-03	7.5659E+00	7.5975E+01	7.8291E+01
1.1167E-04	1.0120E+01	8.6282E+01	1.8340E+02
6.4599E-06	1.3130E+01	-1.5513E+03	-8.1241E+02
2.2263E-07	1.6654E+01	-8.2159E+03	-9.1065E+03
4.2274E-09	2.0776E+01	9.0754E+04	5.0906E+04
3.9219E-11	2.5624E+01	-5.1031E+05	-2.0293E+04
1.4565E-13	3.1408E+01	6.7160E+06	-1.7567E+06
1.4830E-16	3.8531E+01	-6.1580E+08	-2.5586E+08
1.6006E-20	4.8026E+01	5.9927E+10	7.4289E+10
$\sum_{i=1}^{15} w_i f_j(\phi_i) =$		1.22557595	1.08032970

Pretende-se que avalie uma *put* Europeia sobre a acção EVN, com *strike* igual a EUR8 e com vencimento a 6 meses. (3V)

Caso 4 Considere os seguintes parâmetros estimados, na medida $\mathbb{Q}$, para o modelo de Vasiček (1977) e via mercado de *US Treasury bonds*:

alpha	2
gamma	2.0%
rho	5%
r(t)	1.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para diferentes maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(t,T)	A(t,T)	P(t,T)
0.5	0.3161	-0.0037	0.9932
1	0.4323	-0.011234	0.9846
1.5	0.4751	-0.0202	0.9753
2	0.4908	-0.0298	0.9659
2.5	0.4966	-0.0395	0.9565
3	0.4988	-0.0493	0.9471
3.5	0.4995	-0.0591	0.9379
4	0.4998	-0.0690	0.9287

O mercado também transacciona opções Europeias com vencimento a 6 meses e sobre *Treasury Bills* com vencimento a 1 ano:

	strike	98.095%	99.055%
Call		1.0521%	0.327%
Put		0.025%	0.253%

Pretende-se que:

a) Avalie uma *call* Europeia com *strike* igual a 98.095%, com vencimento a 6 meses e sobre Bilhetes do Tesouro com vencimento a 1.5 anos. (2.5V)

b) Avalie uma *call* Europeia com vencimento a 6 meses, strike igual a 104% do par e sobre uma obrigação do Tesouro com vencimento a 1.5 anos, com reembolso *bullet* e a 102% do par, e com uma taxa nominal anual de cupão igual a 4% (cupão semestral na base de calendário 30/360). Considere ainda que a taxa de juro instantânea de 1.85% produz, daqui a 0.5 anos, um valor de equilíbrio de 104% para a obrigação subjacente. (2.5V)

Caso 5 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo Cox, Ingersoll and Ross (1985) via mercado de obrigações do Tesouro alemão, na medida $\mathbb{Q}$, e na *trade date* de 20/12/11 (3ª feira):

k	0.5
theta	2.0%
sigma	5.0%
r	1.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para algumas maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(T-t)	A(T-t)	P(t,T)
0.5	-0.4424	-0.0012	0.9944
1	-0.7867	-0.0043	0.9879
1.415301	-1.0138	-0.0080	0.9820
2	-1.2630	-0.0147	0.9730
2.415301	-1.4003	-0.0202	0.9663
3	-1.5509	-0.0289	0.9566

Pretende-se que:

a) Avalie uma obrigação do Tesouro português com vencimento no dia 23/05/2014, com reembolso bullet e ao par, e com uma taxa de cupão igual a 3% (cupão anual na base de calendário ACT/ACT). Para o efeito, considere que o número de dias de juros vencidos é igual a 214 dias de calendário. (2V)

b) Formule uma decisão de *trading*, sabendo que a obrigação definida na alínea a) tem uma *yield-to-maturity* igual a 1.47%(*bid*)/1.449%(*ask*). (1V)

c) Avalie uma *asset-or-nothing put* sobre o factor de desconto a 12 meses, com vencimento daqui a 2 anos, com strike igual a 98.50% e *contract size* igual a EUR1,000,000. Para o efeito, considere que $Q_{\chi^2(16,4.6377)}(17.5) = 0.361963928$. (2V)

TABLE FOR $N(X)$ WHEN $X \geq 0$

This table shows values of $N(x)$ for $x \geq 0$. The table should be used with interpolation. For example,

$$\begin{aligned} N(0.6278) &= N(0.62) + 0.78[N(0.63) - N(0.62)] \\ &= 0.7324 + 0.78 \times (0.7357 - 0.7324) \\ &= 0.7350 \end{aligned}$$

x	*0.00*	*0.01*	*0.02*	*0.03*	*0.04*	*0.05*	*0.06*	*0.07*	*0.08*	*0.09*
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000