Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juro
Mestrado em Matemática Financeira 09/10
IBS e FCUL

Exame 1ª Época

07/Dez/10 Duração: 3h

Caso 1 Responda sussinta e objectivamente a somente duas das seguintes questões: (2x2.0V)

a) Com base no modelo de Heston é possível chegar à seguinte equação para a variância da taxa de rentabilidade do activo subjacente na *risk-neutral probability measure* $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} v_T &= v_t + k\theta (T-t) + \sigma\rho \left[x_T - x_t - (r-q)(T-t)\right] \\ &\quad + \left(\frac{\sigma\rho}{2} - k\right) \int_t^T v_u du + \sigma\sqrt{1-\rho^2} \int_t^T \sqrt{v_u} dZ_2^{\mathbb{Q}}(u), \end{aligned}$$

onde $k, \theta, \sigma, \rho, r$ e q são parâmetros do modelo, $t \leq T$, $x_t := \ln S_t$ é o logaritmo do preço spot e $Z_2^{\mathbb{Q}}$ é um standard Brownian motion. Determine a função geradora de momentos de v_T condicional ao facto de $x_T = \bar{x}$ (sendo $\bar{x}$ uma constante), i.e. calcule (para $\omega \in \mathbb{R}$)

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp(\omega v_T) | x_T = \bar{x}, v_t\right].$$

b) Com base no modelo de Vasicek, determine o *fair value* (no momento t) de uma *cash-or-nothing call* com vencimento no momento $T+\delta$, com um *contract size* igual a M, com um *strike* igual a k, e sobre a Euribor $E(T, T+\delta)$ a vigorar entre os momentos T $(\geq t)$ e $T+\delta$ (com $\delta > 0$). Para o efeito considere que $P(T, T+\delta) = \left[1 + \delta \times E(T, T+\delta)\right]^{-1}$.

c) Calcule, no âmbito do modelo CIR e na *risk-neutral probability measure* $\mathbb{Q}$, a variância da variável aleatória $\int_t^T r_s ds$ para $t \leq T$ e condicional a $\mathcal{F}_t$.

Caso 2 Considere um processo CEV especificado através da seguinte SDE:

$$dS_t = (r-q) S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Admita que $S = EUR2$, $\beta = 4$, $r = 1\%$, $q = 2\%$ e que a volatilidade da taxa de rentabilidade do activo subjacente é igual a 25% ao ano. Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 1 grau de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a 15.84053333:

x	15.00000000	15.84053333	16.16053333
F(x)	0.457991026	0.500713176	0.516697341

a) Avalie uma call Europeia *at-the-money* sobre o activo S e com maturidade igual a 1 ano. (2.5V)

b) Avalie uma *cash-or-nothing put* com vencimento a 1 ano, com um *contract size* igual a EUR10 e com um *strike* igual a EUR2. (1.5V)

Caso 3 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Heston (1993):

- Cotação spot da acção GN= EUR5;
- *Dividend yield* do activo subjacente (em capitalização contínua) = 0%;
- Taxa de juro sem risco (em capitalização contínua) = 1%;
- Variância instantânea do activo subjacente (v) = 0.09;
- Velocidade de reversão para a média da volatilidade (k) = 2;
- Nível de longo prazo da variância instantânea (θ) = 0.0625;
- Volatilidade da variância instantânea (σ) = 10%; e
- Coeficiente de correlação entre o spot e a variância instantânea (ρ) = -0.7.

O quadro seguinte sumariza a implementação das equações (173) e (174) dos apontamentos para um strike de EUR5, uma maturidade de 6 meses, e através de uma quadratura de Gauss-Laguerre com 15 pontos:

		$X=5$	
w_i	ϕ_i	$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$
2.1823E-01	9.3308E-02	2.7123E-02	-1.6429E-02
3.4221E-01	4.9269E-01	4.0350E-02	-2.4275E-02
2.6303E-01	1.2156E+00	8.2175E-02	-4.7682E-02
1.2643E-01	2.2699E+00	2.2762E-01	-1.1835E-01
4.0207E-02	3.6676E+00	8.4604E-01	-3.3814E-01
8.5639E-03	5.4253E+00	4.1044E+00	-8.8557E-01
1.2124E-03	7.5659E+00	2.4687E+01	1.8431E-01
1.1167E-04	1.0120E+01	1.6925E+02	3.9206E+01
6.4599E-06	1.3130E+01	1.1631E+03	5.0690E+02
2.2263E-07	1.6654E+01	6.4107E+03	4.1733E+03
4.2274E-09	2.0776E+01	1.4415E+04	1.7852E+04
3.9219E-11	2.5624E+01	-6.3935E+04	-1.1791E+04
1.4565E-13	3.1408E+01	8.1727E+04	-4.5568E+04
1.4830E-16	3.8531E+01	-3.6360E+05	-8.5493E+04
1.6006E-20	4.8026E+01	-5.9811E+05	-1.9272E+05
$\sum_{i=1}^{15} w_i f_j(\phi_i) =$		0.19711709	-0.05169667

Pretende-se que:

a) Avalie uma put Europeia at-the-money sobre a acção GN e com vencimento a 6 meses. (2.5V)

b) Avalie uma asset-or-nothing put sobre a acção GN, com strike igual a EUR5, contract size igual a 1 e com vencimento a 6 meses. (1.5V)

Caso 4 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Vasiček (1977) via mercado de obrigações do Tesouro português, na medida $\mathbb{Q}$, e na *trade date* de 08/12/10 (4^{a} feira):

alpha	0.1
gamma	3.0%
rho	1%
r(t)	2.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para maturidades anuais) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(t,T)	A(t,T)	P(t,T)
0.5	0.4877	-0.0004	0.9899
1	0.9516	-0.0014	0.9797
1.2795	1.2010	-0.0023	0.9740
2	1.8127	-0.0055	0.9591
2.2795	2.0383	-0.0071	0.9533
3	2.5918	-0.0119	0.9383

O mercado também transacciona opções Europeias com vencimento no dia 25/03/2011 e sobre Bilhetes do Tesouro com vencimento no dia 25/03/2013:

	strike	98.20%	96.33%
Call		0.0016%	0.176%
Put		2.321%	0.637%

Pretende-se que:

a) Avalie uma obrigação do Tesouro português com vencimento no dia 25/03/2013, com reembolso bullet e ao par, e com uma taxa de cupão igual a 6% (cupão anual na base de calendário ACT/ACT). Para o efeito, considere que o número de dias de juros vencidos é igual a 263 dias de calendário. (2V)

b) Formule uma decisão de *trading* sabendo que a obrigação definida na alínea a) está actualmente cotada a 107.50%(*bid*)/107.70%(*ask*). (1V)

c) Avalie uma *put* Europeia com *strike* igual a 98.20%, com vencimento no dia 25/03/2011 e sobre Bilhetes do Tesouro com vencimento no dia 25/03/2012. (2.5V)

d) Avalie uma *put* Europeia com vencimento no dia 25/03/2011, strike igual a 108% do par e sobre a obrigação do Tesouro definida na alínea a). Considere ainda que a taxa de juro instantânea de 1.76% produz, daqui a 0.2795 anos, um valor de equilíbrio de 108% para a obrigação subjacente. (2.5V)