MODELOS DA ESTRUTURA TEMPORAL DE TAXAS DE JURO 2005-2006
MESTRADO EM MATEMÁTICA FINANCEIRA – IBS e FCUL
EXAME 1ª Época
12/01/07 **Duração: 3 horas**

<u>CASO 1</u> (2x2=4 valores)

Pretende-se que responda às seguintes questões:

a) Admita que o preço do activo "S" obedece ao modelo CEV definido pela seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = (r-q)S_t dt + \delta S_t^{\beta/2} dW_t^Q,$$

em que $\beta < 2$. Determine a fórmula de avaliação de uma opção Europeia de tipo *Range Digital*, com *contract size* igual a "M", vencimento no momento $T(\geq t)$ e *strikes* X_1 e $X_2(\geq X_1)$.

b) Considere adoptar o modelo de Heston (1993). Pretende-se determinar a fórmula de avaliação de uma *call* Europeia com vencimento no momento $T(\geq t)$, com *contract size* igual a "M", *strike* igual a "k" e sobre a volatilidade "v", cujo *payoff* final é dado por:

$$c_T(v_T, k, T) = M(v_T - k)^+.$$

Para o efeito, considere que o valor esperado de uma chi-quadrado não central é igual à soma do parâmetro de não-centralidade com o número de graus de liberdade.

<u>CASO 2</u> (7 valores)

Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Vasicek (1977) via mercado de IRSs:

alpha	0.5
gamma	5%
rho	10%
r(t)	3.5%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para maturidades anuais) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(t,T)	A(t,T)	P(t,T)
0.5	0.4938	-0.0015	0.9814
1	0.9754	-0.0058	0.9608
1.5	1.4451	-0.0128	0.9386
2	1.9033	-0.0222	0.9150
2.5	2.3501	-0.0338	0.8904
3	2.7858	-0.0475	0.8650

Pretende-se que:

a) Avalie um *caplet* com um valor nominal de EUR1,000,000, sobre a Euribor a 12 meses a fixar daqui a 1 ano, com vencimento a 2 anos e *cap rate* igual a 4.5%. (**2.5V**)

b) Avalie uma *put* Europeia com vencimento a 1 ano, *strike* igual a 98.24% do par e sobre uma obrigação do Tesouro com um cupão anual de 4%, vencimento a 3 anos e reembolso *bullet* e ao par. Para o efeito, despreze o *credit spread* entre os mercados de dívida pública e monetário.

Considere ainda que a taxa de juro instantânea de 3.915% produz, daqui a 1 ano, um valor de equilíbrio de 98.24% para a obrigação subjacente. (**3V**)

c) No âmbito do modelo de Vasicek, determine a fórmula de cálculo da variância da seguinte variável aleatória: $\int_t^T r_s$, onde r_s designa a taxa de juro instantânea do monento s, t representa a data de avaliação e $T \geq t$. (**1.5V**)

<u>CASO 3</u> (4 valores)

Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de CIR (1985) via mercado de títulos do Tesouro:

k	2.0
theta	4%
sigma	10%
r	5%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para maturidades anuais) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(T-t)	A(T-t)	P(t,T)
0.5	-0.3160	-0.0074	0.9771
1	-0.4321	-0.0227	0.9567
1.5	-0.4747	-0.0410	0.9373
2	-0.4903	-0.0603	0.9187
2.5	-0.4960	-0.0801	0.9004
3	?	-0.1000	?

Pretende-se que:

a) Determine a taxa de juro *spot* a 3 anos em regime de capitalização contínua. (**1V**)

b) Avalie uma *asset-or-nothing European call* com vencimento a 6 meses, com *strike* igual a 94.018% e sobre uma obrigação de cupão zero com vencimento daqui a 2 anos.[1] (**3V**)

<u>CASO 4</u> (5 valores)

Considere os seguintes factores de desconto associados ao mercado de obrigações do Tesouro nacional:

T (anos)	P(0,T)
0.25	0.9910
0.5	0.9814
0.75	0.9713
1	0.9608
1.25	0.9499
1.5	0.9386
1.75	0.9270
2	0.9150

[1] Daqui a 6 meses a opção em apreço pagará o valor da obrigação de cupão zero subjacente caso esse valor seja superior a 94.018%.

O modelo Hull-White (1990) foi calibrado ao mercado de opções sobre futuros de obrigações, tendo-se obtido as seguintes estimativas: $a = 0.4$ e $\sigma = 2\%$. As tabelas seguintes contêm grelhas trinomiais para a taxa "instantânea" sem reversão para a média bem como para as diversas probabilidades de transição, assumindo que $\Delta t = 0.25$ anos. Pretende-se que:

	r*						p_u				
	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4		i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
			3.464%	3.464%	3.464%	j = 2			0.762	0.762	0.762
		1.732%	1.732%	1.732%	?	j = 1		0.103	0.103	0.103	?
	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	0.000%	j = 0	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
		-1.732%	-1.732%	-1.732%	-1.732%	j = -1		0.253	0.253	0.253	0.253
			-3.464%	-3.464%	-3.464%	j = -2			0.062	0.062	0.062

	p_m						p_d				
	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4		i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
			0.027	0.027	0.027	j = 2			0.087	0.087	0.087
		0.657	0.657	0.657	?	j = 1		0.222	0.222	0.222	?
	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	j = 0	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
		0.657	0.657	0.657	0.657	j = -1		0.122	0.122	0.122	0.122
			0.027	0.027	0.027	j = -2			0.887	0.887	0.887

a) Calcule os quatro valores assinalados por pontos de interrogação. (**2V**)

b) As tabelas seguintes contêm grelhas trinomiais para a taxa de juro "instantânea" e para os *Arrow-Debreu prices*. Calcule os dois valores assinalados por pontos de interrogação. (**2V**)

	r(i,j)						Q(i,j)				
	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4		i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
			7.591%	7.827%	8.054%	j = 2			0.0198	0.0431	0.0644
		5.614%	5.859%	6.095%	6.322%	j = 1		0.1652	0.2160	0.2242	0.2177
	3.629%	3.882%	4.127%	4.363%	4.590%	j = 0	1.0000	0.6606	0.5087	0.4340	0.3924
		2.150%	2.395%	2.631%	?	j = -1		0.1652	0.2169	0.2260	?
			0.663%	0.899%	1.126%	j = -2			0.0200	0.0439	0.0662

c) A seguinte grelha trinomial resume a avaliação de uma *call* Americana com vencimento a 6 meses, com *strike* igual a 97.903% e sobre um Bilhete do Tesouro com vencimento daqui a 1 ano. Calcule o valor assinalado com um ponto de interrogação. (**1V**)

		American call	
	i = 0	i = 1	i = 2
j = 2			-
j = 1		-	-
j = 0	?	0.0013	-
j = -1		0.0072	0.008057
j = -2			0.016212