Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juro
Mestrado em Matemática Financeira 09/10
IBS e FCUL

Exame 1ª Época

15/Dez/09 Duração: 3h

Caso 1 Responda sussinta e objectivamente a somente duas das seguintes questões: (2x3.0V)

a) Chen and Scott (1995) definem um modelo CIR multi-factores da seguinte forma: A taxa de juro instantânea $r(t)$ é dada pela soma de n factores, i.e.

$$r(t) = \sum_{j=1}^{n} Y_j(t), \tag{1}$$

e cada factor segue um *square-root process*

$$dY_j(t) = k_j [\theta_j - Y_j(t)] dt + \sigma_j \sqrt{Y_j(t)} dW_j^{\mathbb{Q}}(t), \tag{2}$$

para $j = 1, \ldots, n$, sendo os diversos factores independentes entre si, ou seja

$$d\left\langle W_i^{\mathbb{Q}}, W_j^{\mathbb{Q}} \right\rangle_t = 0$$

para $i \neq j$. Determine a fórmula de cálculo do factor de desconto $P(t,T)$.

b) Avalie no momento t, e utilizando o modelo CEV (com $\beta < 2$), uma call Europeia com vencimento no momento T $(\geq t)$ e com payoff terminal igual a $(S_T - X_1) \mathbb{1}_{\{S_T > X_2\}}$, com $X_1, X_2 \in \mathbb{R}_+$.

c) Calcule, no âmbito do modelo de Vasiček (1977), o seguinte valor esperado:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\lambda r_t} \exp\left(-\mu \int_{t_0}^{t} r_s ds \right) | \mathcal{F}_{t_0} \right].$$

Caso 2 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Heston (1993):

- Cotação spot da acção EVN= EUR10;
- Dividend yield do activo subjacente (em capitalização contínua) = 2%;
- Taxa de juro sem risco (em capitalização contínua) = 1%;
- Variância instantânea do activo subjacente $(v) = 0.03$;
- Velocidade de reversão para a média da volatilidade $(k) = 1.5$;
- Nível de longo prazo da variância instantânea $(\theta) = 0.02$;

- Volatilidade da variância instantânea (σ) = 15%; e
- Coeficiente de correlação entre o spot e a variância instantânea (ρ) = -0.5.

O quadro seguinte sumariza a implementação das equações (173) e (174) dos apontamentos para dois strikes (EUR10 e EUR8), e através de uma quadratura de Gauss-Laguerre com 20 pontos:

		$X = 10$		$X = 8$	
w_i	ϕ_i	$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$	$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$
1.6875E-01	7.0540E-02	2.4491E-03	-2.4237E-02	2.4188E-01	2.1519E-01
2.9125E-01	3.7213E-01	3.3599E-03	-3.2646E-02	3.2618E-01	2.9025E-01
2.6669E-01	9.1658E-01	6.2272E-03	-5.5172E-02	5.5469E-01	4.9403E-01
1.6600E-01	1.7073E+00	1.6459E-02	-1.1472E-01	1.1750E+00	1.0494E+00
7.4826E-02	2.7492E+00	6.2308E-02	-2.8450E-01	3.0426E+00	2.7344E+00
2.4964E-02	4.0489E+00	3.1745E-01	-8.0104E-01	9.3644E+00	8.5229E+00
6.2026E-03	5.6152E+00	2.0128E+00	-2.3277E+00	3.2812E+01	3.0599E+01
1.1450E-03	7.4590E+00	1.5025E+01	-5.0512E+00	1.2123E+02	1.1871E+02
1.5574E-04	9.5944E+00	1.2800E+02	1.7788E+01	3.9022E+02	4.3269E+02
1.5401E-05	1.2039E+01	1.2255E+03	5.0993E+02	1.5218E+02	7.7118E+02
1.0865E-06	1.4814E+01	1.3070E+04	7.6604E+03	-1.5603E+04	-1.0378E+04
5.3301E-08	1.7949E+01	1.5359E+05	1.0817E+05	-1.6977E+05	-1.5651E+05
1.7580E-09	2.1479E+01	1.9339E+06	1.5661E+06	3.2090E+04	-4.4010E+05
3.7255E-11	2.5452E+01	2.3808E+07	2.2776E+07	2.7567E+07	2.1873E+07
4.7675E-13	2.9933E+01	1.6781E+08	2.6441E+08	-4.4205E+07	1.0089E+08
3.3728E-15	3.5013E+01	-8.0936E+09	-3.0073E+09	-1.3620E+10	-1.2740E+10
1.1550E-17	4.0833E+01	-7.1486E+11	-5.6208E+11	6.7879E+11	4.7629E+11
1.5395E-20	4.7620E+01	-2.1670E+13	-3.2034E+13	-4.5265E+13	-2.4697E+13
5.2864E-24	5.5811E+01	1.1534E+16	7.5191E+15	1.0839E+16	6.6395E+15
1.6565E-28	6.6524E+01	6.8197E+17	4.2297E+18	-1.0848E+19	-1.0699E+19
$\sum_{i=1}^{20} w_i f_j(\phi_i) =$		0.11358604	-0.08043763	1.32071319	1.22958644

Pretende-se que:

a) Avalie uma call Europeia at-the-money sobre a acção EVN e com vencimento a 12 meses. (2V)

b) Avalie uma range asset-or-nothing option sobre a acção EVN, com strikes iguais a EUR10 e EUR8, contract size igual a 1 e com vencimento a 12 meses. (2V)

Caso 3 Considere os seguintes factores de desconto associados ao mercado de dívida publica alemã:

T (anos)	P(0,T)
1	0.990977
2	0.96757
2.99	0.934926
3	0.934561
3.01	0.934196
4	0.895714
5	0.853824
6	0.810875

O modelo Hull and White (1990) foi calibrado ao mercado de futuros sobre obrigações do Tesouro (EUREX), tendo-se obtido as seguintes estimativas: $a = 0.2$ e $\sigma = 0.05$. O mercado também transacciona opções Europeias com vencimento a 3 anos e sobre obrigações de cupão zero com vencimento a 4 anos:

strike:	96.545%	98.000%
Call	1.836%	1.304%
Put	2.492%	3.320%

Pretende-se que:

a) Calcule o factor de desconto a 2 anos que irá vigorar daqui a 3 anos caso, daqui a 3 anos, a taxa de juro instantânea seja igual a 3%. (1V)

b) Avalie uma call Europeia com vencimento a 3 anos, sobre uma obrigação de cupão zero com vencimento a 5 anos, e com um preço de exercicio igual a 92.334%. (2V)

c) Avalie uma call Europeia com vencimento a 3 anos, strike igual a 98% do par e sobre uma obrigação do Tesouro com um cupão anual de 3% (taxa efectiva anual na base 30/360), vencimento a 5 anos e reembolso *bullet* e ao par. Considere ainda que $B(3,4) = 0.906346235$, $\ln A(3,4) = -0.008880834$, e que a taxa de juro instantânea de 2.9% produz, daqui a 3 anos, um valor de equilíbrio de 98% para a obrigação subjacente. (3V)

Caso 4 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo Cox, Ingersoll and Ross (1985) via mercado de obrigações do Tesouro português:

k	1.5
theta	3.0%
sigma	5.0%
r	1.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para maturidades anuais) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(T-t)	A(T-t)	P(t,T)
1	-0.5178	-0.0145	0.9806
2	-0.6332	-0.0410	0.9538
3	-0.6589	-0.0702	0.9261
4	-0.6647	-0.1000	0.8988
5	-0.6659	-0.1300	0.8723
6	-0.6662	-0.1599	0.8465

Pretende-se que:

a) Avalie uma put Europeia ATM-forward com vencimento a 2 anos, e sobre uma obrigação de cupão zero com vencimento a 5 anos, sabendo que $L_1 = 0.00039576$, $\zeta_1 = 1.255149144$ e $Q_{\chi^2_{(72,1.255149144)}}(73.27392) = 0.477223473$. (2V)

b) Avalie uma *cash-or-nothing* call sobre a Euribor a 12 meses, com vencimento daqui a 2 anos, com strike igual a 2.992% e *contract size* igual a EUR1,000,000 (2V).

Referências

Chen, R.-R. and L. Scott, 1995, Interest Rate Options in Multifactor Cox-Ingersoll-Ross Models of the Term Structure, *Journal of Derivatives*, Winter, 53–72.

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385–407.

Heston, S., 1993, A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies* 6, 327–343.

Hull, J. and A. White, 1990, Pricing Interest Rate Derivative Securities, *Review of Financial Studies* 3, 573–592.

Vasiček, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177–188.