Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juro
Mestrado em Matemática Financeira 07/08
IBS e FCUL

Exame 1ª Época

12/Dez/08 Duração: 3h

Caso 1 Responda sussinta e objectivamente a somente duas das seguintes questões: (2x3.0V)

a) No modelo CIR,

$$dr_t = k(\theta - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t^{\mathbb{Q}},$$

demonstra-se que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\lambda r_t}\exp\left(-\mu\int_{t_0}^{t} r_s ds\right)|\mathcal{F}_{t_0}\right] = \exp\left[\phi(t-t_0) - r_{t_0}\psi(t-t_0)\right],$$

onde

$$\psi_{\lambda,\mu}(t-t_0) := \frac{\lambda\left[h+k+(h-k)e^{h(t-t_0)}\right] + 2\mu\left[e^{h(t-t_0)}-1\right]}{\sigma^2\lambda\left(e^{h(t-t_0)}-1\right)+h-k+(k+h)e^{h(t-t_0)}}, \tag{1}$$

e $h := \sqrt{k^2+2\sigma^2\mu}$. Obtenha a equação (1) através da solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial\psi(t-t_0)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2\psi^2(t-t_0) - k\psi(t-t_0) + \mu,$$

sujeita à condição terminal $\psi(0) = \lambda$.

b) Demonstre que um *floorlet* pode ser avaliado como sendo uma call Europeia sobre um factor de desconto.

c) Admita ter de pagar, daqui a 2 anos, EUR1,000,000 vezes a Euribor a 6 meses em vigor daqui a 1.5 anos (na base de calendário 30/360). Defina as operações financeiras a efectuar hoje de forma a garantir o pagamento de tal responsabilidade.

Caso 2 Considere um processo CEV especificado através da seguinte SDE: (3V)

$$dS_t = (r-q)\,S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Admita que $S = EUR10$, $\beta = 1.5$, $r = 3\%$, $q = 0\%$ e que a volatilidade da taxa de rentabilidade do activo subjacente é igual a 18% ao ano. Pretende-se que avalie uma opção *range asset-or-nothing* com vencimento a 0.25 anos, com um *contract size* igual a 100 e com *strikes* iguais a EUR8 e EUR12. Para o efeito, considere a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 6 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a 1979.02:

x	1763.46	1870.43	1971.61	2067.84	2159.79
F(x)	0.00538	0.097722	0.444493	0.824279	0.973346

Caso 3 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Vasiček (1977) via mercado de EUR Treasuries:

alpha	1
gamma	3,5%
rho	6%
r(t)	4,0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para maturidades anuais) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(t,T)	A(t,T)	P(t,T)
0.5	0.3935	-0.0018	0.9826
1	0.6321	-0.0046	0.9706
1.5	0.7769	-0.0069	0.9627
2	0.8647	-0.0085	0.9578
2.5	0.9179	-0.0096	0.9547
3	0.9502	-0.0103	0.9528

O mercado também transacciona opções Europeias com vencimento a 1 ano e sobre Treasury Bills com vencimento a 2 anos:

	strike	97.47%	98.00%
Call		1.649%	1.316%
Put		0.473%	0.656%

Pretende-se que:

a) Avalie um IRS com vencimento a 1.5 anos, com uma cotação igual a 6%/Euribor a 1 ano e um montante igual a 1,000,000 EUR, assumindo pagar taxa fixa com *revolving* semestral (na base de calendário 30/360) e ignorando o *credit spread* entre o MMI e o Tesouro. (1.5V)

b) Avalie um *floorlet* com um valor nominal de EUR1,000,000, sobre a Euribor a 6 meses a fixar daqui a 1 ano, com vencimento a 1.5 anos e *floor rate* igual a 3.0%. (2.5V)

c) Avalie uma call Europeia com vencimento a 1 ano, strike igual a 102.37% do par e sobre uma obrigação do Tesouro com um cupão semestral de 2.5% (taxa efectiva semestral na base 30/360), vencimento a 2 anos e reembolso *bullet* e ao par. Considere ainda que a taxa de juro instantânea de 3.334% produz, daqui a 1 ano, um valor de equilíbrio de 102.37% para a obrigação subjacente. (3V)

Caso 4 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo Cox, Ingersoll and Ross (1985) via mercado de EUR IRSs:

k	2.0
theta	3.5%
sigma	10.0%
r	4.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para maturidades anuais) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(T-t)	A(T-t)	P(t,T)
0.5	-0.3160	-0.0064	0.9811
1	-0.4321	-0.0199	0.9635
1.5	-0.4747	-0.0359	0.9466
2	-0.4903	-0.0528	0.9302
2.5	-0.4960	-0.0701	0.9140
3	-0.4982	-0.0875	0.8982

Pretende-se que:

a) Avalie uma call Europeia com vencimento a 1.5 anos, com strike igual a 5% e sobre a Euribor a 6 meses (base de calendário 30/360) em vigor daqui a 1 ano, sabendo que $L_1 = 0.001080143$, $\zeta_1 = 4.997552141$ e $Q_{\chi^2_{(28,4.994143104)}}(53.48782372) = 0.018979585$. (2V)

b) Avalie um futuro sobre a Euribor a 6 meses (base de calendário 30/360) e com vencimento daqui a 1 ano. Para o efeito, considere que o futuro é um $\mathbb{Q}$-martingale e que o seu payoff terminal é igual a

$$F_T = EUR100,000 \times 0.5 \times [100\% - E(T, T + 0.5)],$$

sendo "T" a data de vencimento do futuro e $E(T, T + 0.5)$ a Euribor a 6 meses em vigor no momento "T" (2V).

Referências

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385–407.

Vasiček, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177–188.