# Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juro
# Mestrado em Matemática Financeira 11/12
# IBS e FCUL

Exame 1ª Época

18/Dez/12 Duração: 3h

**Caso 1** Responda sussinta e objectivamente às duas questões seguintes: (2x2.0V)

**a)** No modelo CIR, determine a fórmula de cálculo da estatística $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(r_T|\,\mathcal{F}_t\right)$ para $T \geq t$ e onde $\mathbb{Q}$ é a EMM associada ao numerário money-market account.

**b)** Demonstre que no modelo de Heston (1993) uma *call* Europeia é uma função homógenea de grau 1 no *spot* e no *strike*.

**Caso 2** Considere um processo CEV especificado através da seguinte SDE:

$$dS_t = (r-q)\,S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Admita que $S = EUR5$, $\beta = 4$, $r = 1\%$, $q = 3\%$ e $\delta = 0.04$. Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 3 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a 13.00666596:

| x | 12.00666596 | 12.50000000 | 13.00666596 |
|---|---|---|---|
| F(x) | 0.33394911 | 0.36120123 | 0.38932884 |

Pretende-se que avalie uma *call* Europeia ATM sobre o activo $S$ e com maturidade igual a 2 anos. (3V)

**Caso 3** Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Heston (1993):

- Cotação spot da acção EVN= EUR5;
- *Dividend yield* do activo subjacente (em capitalização contínua) = 3% (30/360);
- Taxa de juro sem risco (em capitalização contínua) = 1% (30/360);
- Variância instantânea do activo subjacente ($v$) = 0.04;
- Velocidade de reversão para a média da volatilidade ($k$) = 0.8;
- Nível de longo prazo da variância instantânea ($\theta$) = 0.05;
- Volatilidade da variância instantânea ($\sigma$) = 10%; e
- Coeficiente de correlação entre o *spot* e a variância instantânea ($\rho$) = -0.6.

O quadro seguinte sumariza a implementação das equações (173) e (174) dos apontamentos para um strike de EUR5, uma maturidade de 3 meses, e através de uma quadratura de Gauss-Laguerre com 15 pontos:

| | | $X = 5$ | |
|---|---|---|---|
| $w_i$ | $\phi_i$ | $f_1(\phi_i)$ | $f_2(\phi_i)$ |
| 2.1823E-01 | 9.3308E-02 | 8.9856E-05 | -1.1106E-02 |
| 3.4221E-01 | 4.9269E-01 | 1.4710E-04 | -1.6524E-02 |
| 2.6303E-01 | 1.2156E+00 | 4.4472E-04 | -3.3679E-02 |
| 1.2643E-01 | 2.2699E+00 | 2.4557E-03 | -9.3587E-02 |
| 4.0207E-02 | 3.6676E+00 | 2.0053E-02 | -3.5177E-01 |
| 8.5639E-03 | 5.4253E+00 | 2.1549E-01 | -1.7661E+00 |
| 1.2124E-03 | 7.5659E+00 | 2.9798E+00 | -1.1585E+01 |
| 1.1167E-04 | 1.0120E+01 | 5.3524E+01 | -9.4694E+01 |
| 6.4599E-06 | 1.3130E+01 | 1.2711E+03 | -8.3313E+02 |
| 2.2263E-07 | 1.6654E+01 | 4.0776E+04 | -1.4553E+03 |
| 4.2274E-09 | 2.0776E+01 | 1.8151E+06 | 5.9282E+05 |
| 3.9219E-11 | 2.5624E+01 | 1.1614E+08 | 6.4013E+07 |
| 1.4565E-13 | 3.1408E+01 | 1.1155E+10 | 7.9160E+09 |
| 1.4830E-16 | 3.8531E+01 | 1.6290E+12 | 1.4319E+12 |
| 1.6006E-20 | 4.8026E+01 | 4.6638E+13 | 2.4578E+14 |
| $\sum_{i=1}^{15} w_i f_j(\phi_i) =$ | | 0.04412373 | -0.08197835 |

**a)** Pretende-se que avalie uma *call* Europeia ATM sobre a acção EVN e com vencimento a 3 meses. (2V)

**b)** Reformule a alínea anterior, assumindo que o *spot* e o *strike* são iguais a EUR10. (3V)

**Caso 4** Considere os seguintes parâmetros estimados, na medida $\mathbb{Q}$, para o modelo de Vasiček (1977), via mercado de obrigações do Tesouro alemão e na *trade date* de 18/12/12 (3ª feira):

| | |
|---|---|
| **alpha** | 4 |
| **gamma** | 1.0% |
| **rho** | 10% |
| **r(t)** | 0.5% |

O quadro seguinte contém factores de desconto (para diferentes maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

| T-t | B(t,T) | A(t,T) | P(t,T) |
|---|---|---|---|
| **0.747945** | 0.2375 | -0.0050 | 0.9939 |
| **1** | 0.2454 | -0.0073 | 0.9915 |
| **1.747945** | 0.2498 | -0.0146 | 0.9843 |
| **2** | 0.2499 | -0.0170 | 0.9819 |
| **2.5** | 0.2500 | -0.0218 | 0.9772 |
| **3** | 0.2500 | -0.0267 | 0.9725 |
| **3.5** | 0.2500 | -0.0315 | 0.9678 |
| **4** | 0.2500 | -0.0364 | 0.9631 |

Pretende-se que:

**a)** Avalie uma obrigação do Tesouro alemão com vencimento no dia 20/09/2015, com reembolso bullet e ao par, e com uma taxa de cupão igual a 6% (cupão anual na base de calendário ACT/ACT). Para o efeito, considere que o número de dias de juros vencidos é igual a 92 dias de calendário. (2.5V)

**b)** Formule uma decisão de *trading*, sabendo que a obrigação definida na alínea a) tem um *clean price* igual a 113.50%(*bid*)/113.60%(*ask*). (1V)

**c)** Avalie uma *put* Europeia ATM-forward, com vencimento a 1 ano e sobre obrigações de cupão zero com vencimento a 2.5 anos. (2.5V)

**Caso 5** Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo Cox, Ingersoll and Ross (1985) via mercado de obrigações do Tesouro alemão e na medida $\mathbb{Q}$:

| | |
|---|---|
| **k** | 2.0 |
| **theta** | 1.0% |
| **sigma** | 10.0% |
| **r** | 1.0% |

O quadro seguinte contém factores de desconto (para algumas maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

| T-t | B(T-t) | A(T-t) | P(t,T) |
|---|---|---|---|
| **0.5** | -0.3160 | -0.0018 | 0.9950 |
| **1** | -0.4321 | -0.0057 | 0.9901 |
| **1.5** | -0.4747 | -0.0102 | 0.9851 |
| **2** | -0.4903 | -0.0151 | 0.9802 |
| **2.5** | -0.4960 | -0.0200 | 0.9753 |
| **3** | -0.4982 | -0.0250 | 0.9705 |

Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 8 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a $b$:

| F(x) | | |
|---|---|---|
| x | 25.49024311 | 25.51724263 |
| b | | |
| 1.248066 | 0.995438579 | 0.995478682 |
| 1.249388 | 0.995433822 | 0.995473962 |

Pretende-se que avalie uma put Europeia com *strike* igual a 97.182%, com vencimento a 1 ano, e sobre uma obrigação de cupão zero com vencimento a 3 anos, sabendo que $L_1 = 0.0010801$, $\zeta_1 = 1.2493880$. (2V)

## Referências


Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385–407.

Heston, S., 1993, A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies* 6, 327–343.

Vasiček, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177–188.