

Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juro

Mestrado em Matemática Financeira 13/14

IBS e FCUL

Exame 1ª Época

22/Dez/14

Duração: 3h

Caso 1 Responda sussinta e objectivamente a apenas duas das questões seguintes: (2x2.5V)

- a) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: “No modelo de Heston (1993), o desvio-padrão da taxa de rentabilidade do activo subjacente só segue um processo *Ornstein-Uhlenbeck* caso não seja respeitada a condição de Feller”.
- b) No modelo de Heston (1993), determine a fórmula de cálculo do seguinte valor esperado, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t < T$: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T)^\alpha | \mathcal{F}_t]$.
- c) Determine o *fair value*, no momento t e com base no modelo Cox, Ingersoll and Ross (1985), de uma *call* Europeia com *strike* igual a k , com vencimento no momento $T + \delta$, com um *contract size* igual a δ , e sobre a Euribor $E(T, T + \delta)$ a vigorar entre os momentos T ($\geq t$) e $T + \delta$ (com $\delta > 0$). Para o efeito, considere que $P(T, T + \delta) = [1 + \delta \times E(T, T + \delta)]^{-1}$.

Caso 2 Considere um processo CEV especificado através da seguinte SDE:

$$dS_t = (r - q) S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Admita que $S = \$100$, $\beta = 4$, $r = 1\%$, $q = 3\%$ e que o desvio-padrão (anualizado) da taxa de rentabilidade do activo é igual a 30%. Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 3 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a 22.44519:

x	22.44519	23.44519	24.44519
F(x)	0.41596	0.45807	0.49971

Pretende-se que:

- a) Avalie uma *call* Europeia ATM-*forward* sobre o activo S e com maturidade igual a 0.5 anos. (2V)
- b) Avalie uma *put* Europeia ATM-*forward* sobre o activo S e com maturidade igual a 0.5 anos. (1V)

Caso 3 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Heston (1993):

- Cotação spot da acção EVN= EUR100;
- *Dividend yield* do activo subjacente (em capitalização contínua) = 3% (30/360);

- Taxa de juro sem risco (em capitalização contínua) = 1% (30/360);
- Variância instantânea do activo subjacente (v) = 0.04;
- Velocidade de reversão para a média da volatilidade (k) = 1;
- Nível de longo prazo da variância instantânea (θ) = 0.09;
- Volatilidade da variância instantânea (σ) = 5%; e
- Coeficiente de correlação entre o *spot* e a variância instantânea (ρ) = -0.5.

O quadro seguinte sumariza a implementação das equações (173) e (174) dos apontamentos para os *strikes* de EUR90 e de EUR110, uma maturidade de 2 anos, e através de uma quadratura de Gauss-Laguerre com 15 pontos:

w_i	ϕ_i	$X = 90$		$X = 110$	
		$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$	$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$
2.1823E-01	9.3308E-02	1.3697E-02	8.2335E-03	-7.4404E-02	-2.2346E-01
3.4221E-01	4.9269E-01	2.0418E-02	1.2277E-02	-1.0887E-01	-3.2691E-01
2.6303E-01	1.2156E+00	4.2032E-02	2.5315E-02	-2.0324E-01	-6.0965E-01
1.2643E-01	2.2699E+00	1.2031E-01	7.2816E-02	-4.3456E-01	-1.3022E+00
4.0207E-02	3.6676E+00	4.8375E-01	2.9589E-01	-9.0041E-01	-2.7230E+00
8.5639E-03	5.4253E+00	2.7702E+00	1.7271E+00	-1.3985E+00	-4.5483E+00
1.2124E-03	7.5659E+00	2.3007E+01	1.4776E+01	-9.5686E-01	-4.7771E+00
1.1167E-04	1.0120E+01	2.8350E+02	1.8961E+02	4.6488E-01	-2.3801E+00
6.4599E-06	1.3130E+01	5.3348E+03	3.7481E+03	5.4349E-01	-3.3841E-01
2.2263E-07	1.6654E+01	1.5919E+05	1.1801E+05	3.4915E-02	7.2238E-03
4.2274E-09	2.0776E+01	7.9418E+06	6.2118E+06	-4.7279E-04	1.5040E-04
3.9219E-11	2.5624E+01	7.1849E+08	5.9125E+08	5.0434E-07	-7.1445E-08
1.4565E-13	3.1408E+01	1.3523E+11	1.1682E+11	4.7089E-11	-1.1222E-11
1.4830E-16	3.8531E+01	6.8860E+13	6.2720E+13	-8.0210E-17	1.9171E-17
1.6006E-20	4.8026E+01	1.7717E+17	1.7672E+17	-1.3544E-25	2.5388E-26
$\sum_{i=1}^{15} w_i f_j(\phi_i) =$		0.30337021	0.21671767	-0.21117675	-0.64012367

Pretende-se que:

- Avalie uma *range digital option* Europeia sobre a acção EVN, com *strikes* EUR90 e EUR110, com vencimento a 2 anos e com um *contract size* unitário. (2V)
- Calcule o preço de um futuro sobre a acção EVN e com vencimento a 2 anos. (1V)

Caso 4 Considere os seguintes parâmetros estimados, na medida \mathbb{Q} , para o modelo de Vasiček (1977), via mercado de obrigações do Tesouro português e na *trade date* de 17/12/14 (4^a feira):

alpha	2
gamma	3%
rho	10%
r(t)	1.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para diferentes maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(t,T)	A(t,T)	P(t,T)
0.5	0.3161	-0.0054	0.9915
1	0.4323	-0.0166	0.9793
1.2548	0.4593	-0.0231	0.9727
2	0.4908	-0.0437	0.9526
2.2548	0.4945	-0.0509	0.9457
3	0.4988	-0.0722	0.9257

O mercado também transacciona opções Europeias com vencimento no dia 25/03/2015 e sobre Bilhetes do Tesouro com vencimento no dia 25/03/2017:

	strike	94.807%	97.527%
Call		0.793%	0.071%
Put		0.689%	2.677%

Pretende-se que:

- Avalie uma obrigação do Tesouro português com vencimento no dia 25/03/2017, com reembolso *bullet* e a 101% do par, e com uma taxa de cupão igual a 4% (cupão anual na base de calendário ACT/ACT). Para o efeito, considere que o número de dias de juros vencidos é igual a 272 dias de calendário. (1V)
- Avalie uma *put* Europeia com *strike* igual a 97.527%, com vencimento no dia 25/03/2015 e sobre Bilhetes do Tesouro com vencimento no dia 25/03/2016. (2V)
- Avalie uma *put* Europeia com vencimento no dia 25/03/2015, *strike* igual a 102.50% do par e sobre a obrigação do Tesouro definida na alínea a). Considere ainda que a taxa de juro instantânea de 1.964% produz, daqui a 0.2548 anos, um valor de equilíbrio de 102.50% para a obrigação subjacente. (2V)

Caso 5 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo Cox et al. (1985) via mercado de IRSs e na medida \mathbb{Q} :

k	2.0
theta	2.0%
sigma	10.0%
r	1.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para algumas maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(T-t)	A(T-t)	P(t,T)
0.5	-0.3160	-0.0037	0.9932
1	-0.4323	-0.0114	0.9844
1.5	-0.4750	-0.0205	0.9751
2	-0.4907	-0.0302	0.9655
2.5	-0.4965	-0.0401	0.9560
3	-0.4986	-0.0500	0.9465

Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 16 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a b :

F(x)			
x	12.6131404	20.6464059	20.6567129
b			
4.65039831	0.115109	0.544036	0.544609
4.65271986	0.115051	0.543905	0.544478

Pretende-se que:

- Avalie uma *call* Europeia *at-the-money forward*, com vencimento a 0.5 anos, e sobre uma obrigação de cupão zero com vencimento a 1 ano, sabendo que $L_1 = 0.000789949$ e $\zeta_1 = 4.652719864$. (2V)
- Avalie uma *cash-or-nothing put* sobre a Euribor a 6 meses em vigor daqui 1 ano, com *strike* igual a 1.37%, com vencimento daqui a 1 ano e *contract size* igual a EUR1,000,000. (2V)

Referências

- Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385–407.
- Heston, S., 1993, A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies* 6, 327–343.
- Vasiček, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177–188.