Modelos de Estrutura Temporal de Taxas de Juro
Mestrado em Matemática Financeira 12/13
IBS e FCUL

Exame 1ª Época

19/Dez/13 Duração: 3h

Caso 1 Responda sussinta e objectivamente a apenas duas das questões seguintes: (2x2.0V)

a) Demonstre que no modelo CEV (com $\beta < 2$) uma *put* Europeia é uma função homógenea de grau 1 no *spot* e no *strike*.

b) No modelo CEV com $\beta < 2$, determine, no momento t, a fórmula de avaliação de uma *forward-start put* de estilo Europeu com data de determinação T_1 ($> t$), com vencimento no momento T_2 ($> T_1$) e com strike igual a αS_{T_1}.

c) Considere um depósito com vencimento no momento T e que paga nessa data um valor acumulado igual a

$$V_T = M + M \times E\left(T, T+\delta\right) \times \delta,$$

sendo M o capital associado ao depósito e $E\left(T, T+\delta\right)$ a Euribor em vigor entre os momentos T e $T+\delta$. Pretende-se que determine o valor actual (no momento t) do depósito, assumindo que o banco emitente tem risco interbancário.

Caso 2 Considere um processo CEV especificado através da seguinte SDE:

$$dS_t = \left(r - q\right) S_t dt + \delta S_t^{\frac{\beta}{2}} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Admita que $S = \$10$, $\beta = 1$, $r = 1\%$, $q = 2\%$ e que o desvio-padrão (anualizado) da taxa de rentabilidade do activo é igual a 25%. Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 4 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a 31.68106666:

x	31.68106666	32.32106666	33.00000000
F(x)	0.39446997	0.41695355	0.44084817

Pretende-se que avalie uma *put* Europeia ATM sobre o activo S e com maturidade igual a 2 anos. (3V)

Caso 3 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo de Heston (1993):

- Cotação spot da acção ESC= EUR10;
- *Dividend yield* do activo subjacente (em capitalização contínua) = 2% (30/360);
- Taxa de juro sem risco (em capitalização contínua) = 1% (30/360);
- Variância instantânea do activo subjacente (v) = 0.09;

- Velocidade de reversão para a média da volatilidade $(k) = 2$;
- Nível de longo prazo da variância instantânea $(\theta) = 0.025$;
- Volatilidade da variância instantânea $(\sigma) = 10\%$; e
- Coeficiente de correlação entre o *spot* e a variância instantânea $(\rho) =$ -0.2.

O quadro seguinte sumariza a implementação das equações (173) e (174) dos apontamentos para os *strikes* de EUR10 e de EUR12, uma maturidade de 12 meses, e através de uma quadratura de Gauss-Laguerre com 15 pontos:

w_i	ϕ_i	$X = 10$		$X = 12$	
		$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$	$f_1(\phi_i)$	$f_2(\phi_i)$
2.1823E-01	9.3308E-02	1.7894E-02	-4.0113E-02	-1.8221E-01	-2.4020E-01
3.4221E-01	4.9269E-01	2.6604E-02	-5.9326E-02	-2.6962E-01	-3.5511E-01
2.6303E-01	1.2156E+00	5.4001E-02	-1.1715E-01	-5.3400E-01	-6.9987E-01
1.2643E-01	2.2699E+00	1.4799E-01	-2.9628E-01	-1.3629E+00	-1.7604E+00
4.0207E-02	3.6676E+00	5.3488E-01	-8.9979E-01	-4.2378E+00	-5.2955E+00
8.5639E-03	5.4253E+00	2.4333E+00	-2.9860E+00	-1.4900E+01	-1.7464E+01
1.2124E-03	7.5659E+00	1.2856E+01	-9.3268E+00	-5.4142E+01	-5.6721E+01
1.1167E-04	1.0120E+01	7.0259E+01	-1.9324E+01	-1.8450E+02	-1.6074E+02
6.4599E-06	1.3130E+01	3.4264E+02	2.8483E+01	-5.3980E+02	-3.5392E+02
2.2263E-07	1.6654E+01	1.2296E+03	4.6693E+02	-1.2789E+03	-5.7472E+02
4.2274E-09	2.0776E+01	2.3386E+03	1.7660E+03	-2.3764E+03	-8.1356E+02
3.9219E-11	2.5624E+01	2.8197E+02	2.1219E+03	-3.1666E+03	-1.3025E+03
1.4565E-13	3.1408E+01	-2.5382E+03	-8.8908E+02	-2.1894E+03	-1.6221E+03
1.4830E-16	3.8531E+01	7.4215E+02	-3.1874E+02	-3.3764E+01	-7.3281E+02
1.6006E-20	4.8026E+01	-1.7635E+02	3.3716E+01	2.1628E+02	6.3359E+01
$\sum_{i=1}^{15} w_i f_j(\phi_i) =$		0.11419742	-0.17224869	-0.83281298	-1.03220374

a) Pretende-se que avalie uma *put* Europeia ATM sobre a acção ESC e com vencimento a 12 meses. (1.5V)

b) Avalie uma *range asset-or-nothing option* sobre a acção ESC, com vencimento a 12 meses e *strikes* iguais a EUR10 e a EUR12. (1.5V)

Caso 4 Considere os seguintes parâmetros estimados, na medida $\mathbb{Q}$, para o modelo de Vasiček (1977), via mercado de obrigações do Tesouro alemão e para a *settlement date* de 19/12/13:

alpha	3
gamma	2.0%
rho	3%
r(t)	1.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para diferentes maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(t,T)	A(t,T)	P(t,T)
0.5	0.2590	-0.0048	0.9926
1	0.3167	-0.0136	0.9833
1.3342	0.3272	-0.0201	0.9769
2	0.3325	-0.0333	0.9641
2.3342	0.3330	-0.0399	0.9577
3	0.3333	-0.0532	0.9450

O mercado também transacciona opções Europeias com vencimento no dia 20/04/2014 e sobre Bilhetes do Tesouro com vencimento no dia 20/04/2015:

	strike	96.12%	98.05%
Call		2.012%	0.187%
Put		-	0.102%

Pretende-se que:

a) Avalie uma obrigação do Tesouro alemão com vencimento no dia 20/04/2016, com reembolso *bullet* e ao par, e com uma taxa de cupão igual a 2% (cupão anual na base de calendário ACT/ACT). Para o efeito, considere que o número de dias de juros vencidos é igual a 243 dias de calendário. (1V)

b) Avalie uma *call* Europeia com *strike* igual a 96.12%, com vencimento no dia 20/04/2014 e sobre Bilhetes do Tesouro com vencimento no dia 20/04/2016. (2V)

c) Avalie uma *call* Europeia com vencimento no dia 20/04/2014, strike igual a 100% do par e sobre a obrigação do Tesouro definida na alínea a). Considere ainda que a taxa de juro instantânea de 1.905% produz, daqui a 0.3342 anos, um valor de equilíbrio de 100% para a obrigação subjacente. (2V)

Caso 5 Considere os seguintes parâmetros estimados para o modelo Cox, Ingersoll and Ross (1985) via mercado de IRSs e na medida $\mathbb{Q}$:

k	4.0
theta	2.0%
sigma	10.0%
r	1.0%

O quadro seguinte contém factores de desconto (para algumas maturidades) calculados com base nos parâmetros anteriores:

T-t	B(T-t)	A(T-t)	P(t,T)
0.5	-0.2161	-0.0057	0.9922
1	-0.2454	-0.0151	0.9826
1.5	-0.2493	-0.0250	0.9729
2	-0.2498	-0.0350	0.9632
2.5	-0.2499	-0.0450	0.9536
3	-0.2499	-0.0550	0.9441

Considere ainda a seguinte tabela de probabilidades acumuladas associadas a uma distribuição chi-quadrado não central com 32 graus de liberdade e parâmetro de não centralidade igual a b:

	F(x)		
x	16.00000	32.29313	32.30285
b			
0.297946	0.007724	0.532966	0.533444
0.298036	0.007724	0.532961	0.533440

Pretende-se que:

a) Avalie uma *asset-or-nothing call at-the-money forward* sobre o factor de desconto a 2 anos, com vencimento daqui a 1 ano e *contract size* igual a EUR1,000,000. (2V)

b) Assuma agora que a taxa de juro instantânea é dada pela soma do anterior processo CIR com outro *square-root process* com iguais parâmetros mas com valor inicial igual a 0.25%. Escreva o novo modelo na formulação de Duffie and Kan (1996). (1V)

c) Calcule o novo valor do factor de desconto a 2 anos com base no modelo associado à questão b). (2V)

Referências

Cox, J., J. Ingersoll, and S. Ross, 1985, A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica* 53, 385–407.

Duffie, D. and R. Kan, 1996, A Yield-Factor Model of Interest Rates, *Mathematical Finance* 6, 379–406.

Heston, S., 1993, A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *Review of Financial Studies* 6, 327–343.

Vasiček, O., 1977, An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics* 5, 177–188.