OPÇÕES EXÓTICAS
MSc MATEMÁTICA FINANCEIRA 2011/12
EXAME - Resolução
30/07/12 **Duração: 2.5 horas**

CASO 1

a) Comente a seguinte afirmação: "Uma *As-You-Like-It option* simples com vencimento no momento T_2 e data de escolha no momento T_1 pode ser decomposta numa carteira de opções *standard* envolvendo uma *call option* com vencimento no momento T_1 e uma *put option* com vencimento no momento T_2". Justifique.

Afirmação verdadeira. Basta aplicar a paridade put-call não à put mas sim à call.

Com efeito,

$$AYLIS_{T_1} = \max\left[c_{T_1}(S, X, T_2); p_{T_1}(S, X, T_2)\right]$$

$$= \max\left[p_{T_1}(S, X, T_2) + S_{T_1} \times e^{-q(T_2-T_1)} - X \times e^{-r(T_2-T_1)}; p_{T_1}(S, X, T_2)\right]$$

$$= p_{T_1}(S, X, T_2) + \max\left[S_{T_1} \times e^{-q(T_2-T_1)} - X \times e^{-r(T_2-T_1)}; 0\right]$$

$$= p_{T_1}(S, X, T_2) + e^{-q(T_2-T_1)} \times \max\left[S_{T_1} - X \times e^{-r(T_2-T_1)} \times e^{q(T_2-T_1)}; 0\right]$$

$$= p_{T_1}(S, X, T_2) + e^{-q(T_2-T_1)} \times c_{T_1}\left(S, X \times e^{-r(T_2-T_1)} \times e^{q(T_2-T_1)}, T_{1.}\right)$$

Portanto, para que não existam oportunidades de arbitragem,

$$AYLIS_t = p_t(S, X, T_2) + e^{-q(T_2-T_1)} \times c_t\left(S, X \times e^{-r(T_2-T_1)} \times e^{q(T_2-T_1)}, T_{1.}\right)$$

b) Deduza a fórmula de avaliação de uma *European-style up-and-out call* com uma barreira (U) superior ao *strike* (X) e sem *rebate*.

Via página 37 dos apontamentos,

$$UO(1)_t(S; X; U > X; R = 0; T)$$

$$= e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{X}{S_t}\right)}^{\ln\left(\frac{U}{S_t}\right)} \left(S_t e^y - X\right) \left\{ \phi\left(y; \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right) - \left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \phi\left[y; 2\ln\left(\frac{U}{S_t}\right) + \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right] \right\} dy.$$

Fazendo a mudança de variável de integração $z = y - 2\ln\left(\frac{U}{S_t}\right)$,

$UO(-1)_t(S; X; U > X; R = 0; T)$

$$= e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{X}{S_t}\right)}^{\ln\left(\frac{U}{S_t}\right)} \left(S_t e^y - X\right)\phi\left(y; \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right)dy$$

$$-\left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{X}{U^2/S_t}\right)}^{\ln\left(\frac{U}{U^2/S_t}\right)} \left[S_t\left(\frac{U}{S_t}\right)^2 e^z - X\right]\phi\left(z; \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right)dz$$

$$= e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{X}{S_t}\right)}^{+\infty} \left(S_t e^y - X\right)\phi\left(y; \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right)dy - e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{U}{S_t}\right)}^{+\infty} \left[\left(S_t e^y - U + (U - X)\right)\right]\phi\left(y; \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right)dy$$

$$-\left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{X}{U^2/S_t}\right)}^{+\infty} \left[\frac{U^2}{S_t} e^z - X\right]\phi\left(z; \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right)dz$$

$$+\left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{U}{U^2/S_t}\right)}^{+\infty} \left[\frac{U^2}{S_t} e^z - U + (U - X)\right]\phi\left(z; \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right)dz.$$

$UO(-1)_t(S; X; U > X; R = 0; T)$

$$= c_t(S_t, X, T) - c_t(S_t, U, T) - e^{-r\tau}(U - X)\Phi\left[-\frac{\ln\left(\frac{U}{S_t}\right) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

$$-\left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} c_t\left(\frac{U^2}{S_t}, X, T\right) + \left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} c_t\left(\frac{U^2}{S_t}, U, T\right) + \left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} e^{-r\tau}(U - X)\Phi\left[-\frac{\ln\left(\frac{S_t}{U}\right) - \mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

$$= c_t(S_t, X, T) - c_t(S_t, U, T) - e^{-r\tau}(U - X)\Phi\left[d_2^M(S_t, U)\right]$$
$$-\left(\frac{U}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \left\{c_t\left(\frac{U^2}{S_t}, X, T\right) - c_t\left(\frac{U^2}{S_t}, U, T\right) - e^{-r\tau}(U - X)\Phi\left[d_2^M(U, S_t)\right]\right\}.$$

c) Deduza a fórmula de cálculo do valor actual do *rebate* constante R associado a uma *down-and-out call* e a liquidar (eventualmente) na data de vencimento da *call*.

As fórmulas de avaliação para rebates de knock-out options constantes nos apontamentos pressupõem que o rebate é pago no primeiro tempo de passagem do spot pela barreira.

Agora pretende-se assumir que o rebate é (eventualmente) liquidado na data de vencimento da call (momento T) sse o spot descer abaixo da barreira. Portanto, o valor actual do rebate é dado por:

$$V_t = R \times e^{-r(T-t)} \times \Pr ob\left[\inf_{t<u\leq T}(S_u) \leq H\right].$$

Os apontamentos fornecem, contudo, uma fórmula fechada de avaliação para o rebate (a liquidar no vencimento) de uma knock-in down-barrier:

$KIR_t(-1)$

$$= e^{-r\tau} R\left\{N\left[d_2^M(S_t, H)\right] - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} N\left[d_2^M(H, S_t)\right]\right\}$$

$$== R \times e^{-r(T-t)} \times \Pr ob\left[\inf_{t<u\leq T}(S_u) > H\right].$$

Combinando as duas equações anteriores,

$$V_t = R \times e^{-r(T-t)} \times \Pr ob\left[\inf_{t<u\leq T}(S_u) \leq H\right]$$

$$= R \times e^{-r(T-t)} \times \left\{1 - \Pr ob\left[\inf_{t<u\leq T}(S_u) > H\right]\right\}$$

$$= R \times e^{-r(T-t)} - e^{-r\tau} R \left\{ N\left[d_2^M(S_t, H)\right] - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} N\left[d_2^M(H, S_t)\right] \right\}$$

$$= e^{-r\tau} R \left\{ N\left[-d_2^M(S_t, H)\right] + \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} N\left[d_2^M(H, S_t)\right] \right\}.$$

CASO 2

a)

$r: \quad e^{r\times 1} = 1 + 5\% \Rightarrow r = \ln(1+5\%) \cong 4.879\%.$

$$S_{2,8} = 3\,648{,}71 \times \exp\left\{\left[4.879\% - 3\% - \frac{(0.15)^2}{2}\right] \times \frac{2}{12} + (-0.3629) \times 0.15 \times \sqrt{\frac{2}{12}}\right\}$$
$\cong 3\,573{,}01.$

$\min_{i=1,\dots,6}(S_{i,6}) = 4,022.13 > 3{,}800 \Rightarrow \quad V_{6,6} = 0.00.$

$\min_{i=1,\dots,6}(S_{i,7}) = 3,617.65 < 3{,}800 \Rightarrow \quad V_{6,7} = \max(4{,}000 - 3{,}617.65 ; 0) = 382.35$.

b)

$$\sum_{j=1}^{10} V_{T,j} = 3{,}830.40.$$

$$\hat{V}_0 = e^{-4.879\% \times 1} \times \frac{3{,}830.40}{10} \cong 364.80.$$

$$\sum_{j=1}^{10}\left(V_{T,j}\right)^2 = 4{,}164{,}170.28.$$

$$\sigma\left(\hat{V}_0\right)=\frac{e^{-4.879\%\times 1}}{\sqrt{10}}\times\sqrt{\frac{4{,}164{,}170.28-\left(3{,}830.40\right)^2/10}{10-1}}\cong 164{,}86.$$

c)

Valor actual do depósito bancário:

$$B_0 = \frac{100\%}{1+5\%}+RV_0.$$

Por seu turno,

$$RV_{12M} = \begin{cases} 10\% \Leftarrow \exists u\in\left[0{,}12M\right]: S_u \le 3{,}800 \wedge 50\%\times\dfrac{4{,}000-S_{12M}}{4{,}000}\ge 10\% \\ 50\%\times\dfrac{4{,}000-S_{12M}}{4{,}000} \Leftarrow \exists u\in\left[0{,}12M\right]: S_u \le 3{,}800 \wedge 0\% < 50\%\times\dfrac{4{,}000-S_{12M}}{4{,}000} < 10\% \\ 0\% \Leftarrow S_u > 3{,}800, \forall u\in\left[0{,}12M\right]\vee 50\%\times\dfrac{4{,}000-S_{12M}}{4{,}000}\le 0\% \end{cases}$$

$$=\frac{50\%}{4{,}000}\times\begin{cases} 10\%\times\dfrac{4{,}000}{50\%} \Leftarrow \min\limits_{0<u<12M}\left(S_u\right)\le 3{,}800 \wedge S_{12M} \le 3{,}200 \\ 4{,}000-S_{12M} \Leftarrow \min\limits_{0<u<12M}\left(S_u\right)\le 3{,}800 \wedge 3{,}200 < S_{12M} < 4{,}000 \\ 0 \Leftarrow \min\limits_{0<u<12M}\left(S_u\right) > 3{,}800 \vee S_{12M} > 4{,}000 \end{cases}$$

$$RV_{12M} = \frac{50\%}{4{,}000}\times\begin{cases} 4{,}000-S_{12M} \Leftarrow \min\limits_{0<u<12M}\left(S_u\right)\le 3{,}800 \wedge S_{12M} < 4{,}000 \\ 0 \Leftarrow \min\limits_{0<u<12M}\left(S_u\right) > 3{,}800 \vee S_{12M} \ge 4{,}000 \end{cases}$$
$$-\frac{50\%}{4{,}000}\times\begin{cases} 3{,}200-S_{12M} \Leftarrow \min\limits_{0<u<12M}\left(S_u\right)\le 3{,}800 \wedge S_{12M} < 3{,}200 \\ 0 \Leftarrow \min\limits_{0<u<12M}\left(S_u\right) > 3{,}800 \wedge S_{12M} \ge 3{,}200 \end{cases}$$

$$=\frac{50\%}{4{,}000}\times p_{12M}^{DI}\left(S; X=4{,}000; H=3{,}800; R=0; T=12M\right)$$
$$-\frac{50\%}{4{,}000}\times p_{12M}^{DI}\left(S; X=3{,}200; H=3{,}800; R=0; T=12M\right)$$

Visto que H=3,800 > X=3,200, então

$$p_{12M}^{DI}\left(S; X = 3{,}200; H = 3{,}800; R = 0; T = 12M\right)$$

$$= p_{12M}\left(S; X = 3{,}200; T = 12M\right).$$

Portanto, a remuneração variável envolve uma down-and-in put com zero rebate e uma standard put:

$$RV_0 = \frac{50\%}{4{,}000} \times p_0^{DI}\left(S; X = 4{,}000; H = 3{,}800; R = 0; T = 12M\right)$$
$$- \frac{50\%}{4{,}000} \times p_0\left(S; X = 3{,}200; T = 12M\right).$$

A down-and-in put já foi avaliada na alínea a) (364.80). Consequentemente,

$$RV_0 = \frac{50\%}{4{,}000} \times \left(364.80 - 99.81\right)$$

$$\cong 3.31\%.$$

Em suma,

$$B_0 = 95.24\% + 3.31\% = 98.55\% < 100\% \Rightarrow \text{ Não investir.}$$

<u>CASO 3</u>

a) Formule uma decisão de *trading* para um depósito bancário com vencimento a 12 meses e com uma remuneração igual 9% caso o índice DAX 30 valorize ou desvalorize mais do que 10%.

Designando a cotação do DAX 30 por “S”,

$$RV_{12M} = \begin{cases} 9\% \Leftarrow S_{12M} < 6{,}160 \times 90\% = 5{,}544 \vee S_{12M} > 6{,}160 \times 110\% = 6{,}776 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= 9\% - \begin{cases} 9\% \Leftarrow 5{,}544 < S_{12M} < 6{,}776 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= 9\% - 9\% \times RD_{12M}\left(S; X_a = 5{,}544; X_b = 6{,}776; T = 12M; M = 1\right).$$

Portanto,

$$B_0 = \frac{100\%}{1 + 1.22\%} + RV_0,$$

e

$$RV_0 = \frac{9\%}{1 + 1.22\%} - 9\% \times RD_0\left(S; X_a = 5{,}544; X_b = 6{,}776; T = 12M; M = 1\right)$$

$$= \frac{9\%}{1 + 1.22\%} - \frac{9\%}{1 + 1.22\%} \times \left\{N\left[d_2^M(5{,}544)\right] - N\left[d_2^M(6{,}776)\right]\right\}$$

$$r: \quad e^{r \times 12/12} = 1 + 1.22\% \times 12/12 \Rightarrow r = \frac{12}{12}\ln\left(1 + 1.22\% \times 12/12\right) \cong 1.213\%.$$

$$N\left[d_2^M(5{,}544)\right] = N\left[\frac{\ln\left(6{,}160/5{,}544\right) + \left(1.213\% - 1\% - (0.2)^2/2\right) \times 1}{0.2 \times \sqrt{1}}\right]$$
$$= N(0.4374)$$
$$\cong N(0.44)$$
$$= 0.67.$$

$$N\left[d_2^M(6{,}776)\right] = N\left[\frac{\ln\left(6{,}160 / 6{,}776\right) + \left(1.213\% - 1\% - (0.2)^2 / 2\right)\times 1}{0.2\times\sqrt{1}}\right]$$

$$\begin{aligned} &= N(-0.5659) \\ &\cong N(-0.57) \\ &= 1 - N(0.57) \\ &= 1 - 0.7157 \\ &= 0.2843. \end{aligned}$$

$$RV_0 = \frac{9\%}{1+1.22\%} - \frac{9\%}{1+1.22\%}\times\{0.67 - 0.2843\} = 5.48\%.$$

$$B_0 = 98.79\% + 5.48\% \cong 104.28\% > 100\% \Rightarrow \text{ Investir.}$$

b) Reformule a resposta à alínea anterior assumindo que a remuneração de 9% é liquidada daqui a 1 ano caso o índice DAX 30 valorize mais do que 10% em qualquer momento durante os próximos 12 meses.

$$B_0 = \frac{100\%}{1+1.22\%} + RV_0.$$

Por seu turno,

$$RV_{12M} = \begin{cases} 9\% \Leftarrow \max\limits_{0<u<12M}(S_u) > 6{,}160\times 110\% = 6{,}776 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= 9\% \times 1_{\left\{\max\limits_{0<u<12M}(S_u) > 6{,}776\right\}}$$

Portanto,

$$RV_0 = \frac{9\%}{1+1.22\%}\times Q\left[\max_{0<u<12M}(S_u) > 6{,}776\right]$$

$$= \frac{9\%}{1+1.22\%}\times\left\{1 - Q\left[\max_{0<u<12M}(S_u) < 6{,}776\right]\right\}$$

Visto que $\frac{9\%}{1+1.22\%} \times Q\left[\max_{0<u<12M}(S_u) < 6{,}776\right]$ corresponde ao valor actual de um rebate igual a 9% e associado a uma knock-in up barrier igual a 6,776 pontos de índice, podemos usar a equação (122) dos apontamentos com $\eta = 1$ para calcular a probabilidade:

$$Q\left[\max_{0<u<12M}(S_u) < 6{,}776\right] = N\left[-d_2^M(6{,}160;6{,}776)\right] - \left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\mu}{0.2^2}} N\left[-d_2^M(6{,}776;6{,}160)\right],$$

sendo

$$\mu = r - q - \sigma^2/2 = 1.213\% - 1\% - \frac{(0.2)^2}{2} = \text{-0.01787.}$$

Via alínea anterior,

$$N\left[-d_2^M(6{,}160;6{,}776)\right] = 1 - 0.2843 = 0.7157.$$

$$\begin{aligned} N\left[-d_2^M(6{,}776;6{,}160)\right] &= N\left[-\frac{\ln\left(6{,}776/6{,}160\right) + \left(1.213\% - 1\% - (0.2)^2/2\right)\times 1}{0.2\times\sqrt{1}}\right] \\ &= N(\text{-}\,0.3872) \\ &\cong N(-0.39) \\ &= 1 - N(0.39) \\ &= 1 - 0.6517 \\ &= 0.3483. \end{aligned}$$

Portanto,

$$Q\left[\max_{0<u<12M}(S_u) < 6{,}776\right] = 0.7157 - \left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}} \times 0.3483 \cong 0.393487,$$

$$RV_0 = \frac{9\%}{1+1.22\%}\times(1 - 0.393487) \cong 5.39\%,$$

e

$$B_0 = 98.79\% + 5.39\% \cong 104.19\% > 100\% \Rightarrow \text{ Investir.}$$

c) Formule uma decisão de investimento relativamente a um depósito bancário (denominado em EUR) com vencimento a 12 meses e com uma remuneração igual a 60% da taxa de valorização do índice DAX 30, desde que tal índice suba acima dos 6,776 pontos durante os próximos 12 meses. Caso o índice DAX 30 nunca suba acima dos 6,776 pontos durante os próximos 12 meses, então a remuneração a liquidar no final do ano será igual a 0%.

$$B_0 = \frac{100\%}{1+1.22\%} + RV_0.$$

Relativamente à componente de remuneração variável,

$$RV_{12M} = \begin{cases} 60\% \times \max\left(0\%; \dfrac{S_{6M} - S_0}{S_0}\right) \Leftarrow \sup\limits_{0<u\leq 12M} (S_u) > 6{,}776 \\ 0\% \Leftarrow \sup\limits_{0<u\leq 12M} (S_u) \leq 6{,}776 \end{cases}$$

$$= \frac{60\%}{S_0} \times \begin{cases} \max(0; S_{6M} - S_0) \Leftarrow \sup\limits_{0<u\leq 12M} (S_u) > 6{,}776 \\ 0 \Leftarrow \sup\limits_{0<u\leq 12M} (S_u) \leq 6{,}776 \end{cases}$$

$$= \frac{60\%}{S_0} \times c_{12M}^{ui}(S_{12M}; X = S_0; H = 6{,}776; R = 0; T = 1y).$$

Portanto, a remuneração variável é dada por uma up-and-in zero rebate call, i.e.

$$RV_0 = \frac{60\%}{S_0} \times c_0^{ui}(S_0; X = S_0; H = 6{,}776; R = 0; T = 1y).$$

A up-and-in call sem rebate é avaliada com base na seguinte expressão:

$$c_t^{ui}(S; X; H; T; R = 0)$$

$$= \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \left\{ p_t\left(\frac{H^2}{S_t}; X; T\right) - p_t\left(\frac{H^2}{S_t}; H; T\right)\right.$$

$$\left. + (H - X)e^{-r\tau} N\left[-d_2^M(H, S_t)\right]\right\} 1_{\{H>X\}}$$

$$+ c_t(S; \max(H; X); T) + [\max(H; X) - X]e^{-r\tau} N\left[d_2^M(S_t, H)\right]$$

Atendendo a que X = 6,160 < H = 6,776, então a expressão anterior pode ser escrita como:

$$c_t^{ui}\left(S;X;H;T;R=0\right)$$

$$=\left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}\left\{p_t\left(\frac{H^2}{S_t};X;T\right)-p_t\left(\frac{H^2}{S_t};H;T\right)\right.$$

$$\left.+\left(H-X\right)e^{-r\tau}N\left[-d_2^M\left(H,S_t\right)\right]\right\}$$

$$+c_t\left(S;H;T\right)+\left(H-X\right)e^{-r\tau}N\left[d_2^M\left(S_t,H\right)\right]$$

Considerando os dados em apreço, e dado que μ = -0.01787, então:

$$c_0^{ui}\left(S_0=6{,}160;X=S_0;H=6{,}776;R=0;T=1y\right)$$

$$=\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}}\left\{p_0\left(\frac{6{,}776^2}{6{,}160};X=6{,}160;T=1y\right)-p_0\left(\frac{6{,}776^2}{6{,}160};6{,}776;1y\right)\right.$$

$$\left.+\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[-d_2^M\left(6{,}776;6{,}160\right)\right]\right\}$$

$$+c_0\left(6{,}160;6{,}776;1y\right)+\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[d_2^M\left(6{,}160;6{,}776\right)\right].$$

Visto que o valor de uma standard call ou put option é uma função homógenera de grau 1 no spot e no strike, então

$$c_0^{ui}\left(S_0=6{,}160;X=S_0;H=6{,}776;R=0;T=1y\right)$$

$$=\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}}\left\{\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times p_0\left(6{,}160;6{,}160\times\frac{6{,}160^2}{6{,}776^2}\cong 5{,}091;T=1y\right)\right.$$

$$\left.-\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times c_0\left(6{,}160;6{,}776\times\frac{6{,}160^2}{6{,}776^2}\cong 5{,}600;1y\right)+\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[-d_2^M\left(6{,}776;6{,}160\right)\right]\right\}$$

$$+c_0\left(6{,}160;6{,}776;1y\right)+\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[d_2^M\left(6{,}160;6{,}776\right)\right].$$

Utilizando os dados do enunciado, e visto que

$$N\left[-d_2^M(6{,}160;6{,}776)\right] = 1 - 0.2843 = 0.7157;$$

$$N\left[-d_2^M(6{,}776;6{,}160)\right] = 0.3483,$$

então

$$c_0^{ui}\left(S_0 = 6{,}160; X = S_0; H = 6{,}776; R = 0; T = 1y\right)$$

$$= \left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}} \left\{\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times 98.53\right.$$

$$\left.-\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times 800.03 + (6{,}776 - 6{,}160)\times e^{-1.213\%\times 1}\times 0.3483\right\}$$

$$+265.80 + (6{,}776 - 6{,}160)\times e^{-1.213\%\times 1}\times 0.2843$$

$$\cong 484.57.$$

Em suma,

$$RV_0 = \frac{60\%}{6{,}160}\times 484.57 \cong 4.72\%,$$

e

$B_0 = 98.79\% + 4.72\% \cong 103.51\% > 100\% \Rightarrow$ Investir.

d) Consegue formular uma estratégia de *static hedging* para uma posição curta sobre o depósito definido na alínea anterior? Para o efeito, assuma um valor nominal igual a €100,000 para o depósito.

A resposta é negativa, a não ser que "r" e "q" fossem iguais.

Com efeito, recuperemos a fórmula de avaliação da alínea anterior:

$$c_0^{ui}\left(S_0=6{,}160; X=S_0; H=6{,}776; R=0; T=1y\right)$$

$$=\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}}\left\{\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times p_0\left(6{,}160;5{,}091;T=1y\right)\right.$$

$$\left.-\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times c_0\left(6{,}160;5{,}600;1y\right)+\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[-d_2^M\left(6{,}776;6{,}160\right)\right]\right\}$$

$$+c_0\left(6{,}160;6{,}776;1y\right)+\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[d_2^M\left(6{,}160;6{,}776\right)\right]$$

$$=\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}}\times\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times p_0\left(6{,}160;5{,}091;T=1y\right)$$

$$-\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}}\times\frac{6{,}776^2}{6{,}160^2}\times c_0\left(6{,}160;5{,}600;1y\right)$$

$$+c_0\left(6{,}160;6{,}776;1y\right)$$

$$+\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[d_2^M\left(6{,}160;6{,}776\right)\right]$$

$$+\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}}\times\left(6{,}776-6{,}160\right)\times e^{-1.213\%\times1}\times N\left[-d_2^M\left(6{,}776;6{,}160\right)\right].$$

Atendendo à expressão anterior, a estratégia de static hedging passaria por:

1) Comprar 1 put standard sobre o DAX 30 com strike igual a 5,091 pontos, vencimento a 1 ano e contract size igual a $\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}+2}$;
2) Vender 1 call standard sobre o DAX 30 com strike igual a 5,600 pontos, vencimento a 1 ano e contract size igual a $\left(\frac{6{,}776}{6{,}160}\right)^{\frac{2\times(-0.01787)}{0.2^2}+2}$;
3) Comprar 1 call standard sobre o DAX 30 com strike igual a 6,776 pontos, vencimento a 1 ano e contract size igual a 1;
4) Comprar 1 cash-or-nothing call sobre o DAX 30 com strike igual a 6,776 pontos, vencimento a 1 ano e contract size igual a $\left(6{,}776-6{,}160\right)$;
5) Todavia, a última linha da equação anterior só poderia ser interpretada como uma posição longa sobre uma asset-or-nothing call caso “r” e “q” fossem iguais.