OPÇÕES EXÓTICAS
MSc MATEMÁTICA FINANCEIRA 2015/15
EXAME - Resolução
30/07/15 **Duração: 2.5 horas**

CASO 1

a) Formule, no momento "t" ($\leq T$), o cálculo do *fair value* de uma obrigação de caixa com vencimento no momento "T" e que paga nessa mesma data o reembolso do valor nominal e uma remuneração variável. Tal remuneração variável é igual à taxa de variação do índice PSI20 entre os momentos "T" e "t", desde que a cotação máxima registada pelo PSI20 entre os momentos "T" e "t" seja superior a 120% da cotação no momento "t".

O *payoff*, na data de vencimento, da obrigação de caixa é dado por:

$$B_T = 100\% \times \frac{S_T - S_t}{S_t} \times 1_{\left\{\sup\limits_{t \leq u \leq T}(S_u) > 1.2 S_t\right\}}$$

Portanto,

$$B_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} \times E_Q\left[S_T \times 1_{\left\{\sup\limits_{t \leq u \leq T}(S_u) > 1.2 S_t\right\}} \middle| F_t \right] - e^{-r(T-t)} Q\left[\sup_{t \leq u \leq T}(S_u) > 1.2 S_t \middle| F_t \right]. \qquad (1)$$

O 2º termo no lado direito da equação (1) pode ser obtido via Proposição 50 dos apontamentos, com $\eta = 1$:

$$Q\left[\sup_{t \leq u \leq T}(S_u) > 1.2 S_t \middle| F_t \right] = N\left[d_2^M(S_t; 1.2 S_t)\right] + \left(\frac{1.2 S_t}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} N\left[-d_2^M(1.2 S_t; S_t)\right], \qquad (2)$$

sendo

$$\mu \equiv r - q - \sigma^2/2.$$

Relativamente ao 1º termo no lado direito da equação (1), necessitamos da função densidade de probabilidade conjunta do preço spot e do respectivo máximo. É mais simples operar uma mudança de medida de probabilidade, tomando como numerário o spot acumulado de dividendos:

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}\times E_Q\left[S_T\times 1_{\left\{\sup\limits_{t\le u\le T}(S_u)>1.2S_t\right\}}\middle|F_t\right]$$

$$=\frac{e^{rt}}{S_t}\times E_Q\left[\frac{S_T\times 1_{\left\{\sup\limits_{t\le u\le T}(S_u)>1.2S_t\right\}}}{e^{rT}}\middle|F_t\right]$$

$$=\frac{S_te^{qt}}{S_t}\times E_{Q_S}\left[\frac{S_T\times 1_{\left\{\sup\limits_{t\le u\le T}(S_u)>1.2S_t\right\}}}{S_Te^{qT}}\middle|F_t\right]$$

$$=e^{-q(T-t)}Q_S\left[\sup_{t\le u\le T}(S_u)>1.2S_t\middle|F_t\right],$$

onde Q_S é a nova medida de probabilidade associada ao novo numerário S_te^{qt} e definida através da seguinte Rádon-Nikodym derivative:

$$\left.\frac{dQ_S}{dQ}\right|F_t=\frac{S_Te^{qT}}{S_te^{qt}}\frac{e^{rt}}{e^{rT}}.$$

Assumindo que "S" segue um GBM, i.e. que

$$S_T=S_t\exp\left\{\left[r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right](T-t)+\sigma\int_t^T dW_u^Q\right\},$$

então:

$$\left.\frac{dQ_S}{dQ}\right|F_t=\exp\left[-\frac{1}{2}\int_t^T(-\sigma)^2\,du-\int_t^T(-\sigma)dW_u^Q\right].$$

Aplicando o teorema de Girsanov,

$$dW_t^{Q_S}=-\sigma dt+dW_t^Q.$$

Consequentemente,

$$S_T = S_t \exp\left\{\left[r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right](T-t) + \sigma\int_t^T \left(\sigma du + dW_u^{Q_S}\right)\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$S_T = S_t \exp\left\{\left[r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right](T-t) + \sigma\int_t^T dW_u^{Q_S}\right\}.$$

Comparando as 2 últimas equações constata-se que a probabilidade $Q_S\left[\sup_{t\le u\le T}(S_u) > 1.2S_t \middle| F_t\right]$ pode continuar a ser obtida, na nova medida Q_S, via Proposição 50 dos apontamentos com $\eta = 1$ e substituindo $\mu := r - q - \frac{\sigma^2}{2}$ por $\overline{\mu} := r - q + \frac{\sigma^2}{2}$. Assim,

$$\frac{e^{-r(T-t)}}{S_t} \times E_Q\left[S_T \times 1_{\left\{\sup_{t\le u\le T}(S_u) > 1.2S_t\right\}} \middle| F_t\right]$$

$$= e^{-q(T-t)} Q_S\left[\sup_{t\le u\le T}(S_u) > 1.2S_t \middle| F_t\right] \tag{3}$$

$$= e^{-q(T-t)}\left\{N\left[\frac{\ln\left(\frac{S_t}{1.2S_t}\right) + \overline{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] + \left(\frac{1.2S_t}{S_t}\right)^{\frac{2\overline{\mu}}{\sigma^2}} N\left[-\frac{\ln\left(\frac{1.2S_t}{S_t}\right) + \overline{\mu}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]\right\}.$$

Combinando as equações (1), (2) e (3), obtém-se a fórmula de avaliação desejada.

b) Admita vender uma *as-you-like-it option* simples com vencimento no momento T_2 e com data de escolha no momento T_1 ($<T_2$). Considere ainda já ter efectuado o *static hedging* desta posição curta mediante a compra de uma *call* standard com vencimento no momento T_2 e de uma *put standard* com vencimento no momento T_1. Caso, no momento T_1, o cliente decida escolher a *put*, quais serão as operações financeiras que deverá desencadear no momento T_1 para garantir o *hedging* da sua posição?

Assumindo que "r" e "q" são iguais entre t e T_1 e entre T_1 e T_2, a paridade put-call implica que

$$c_{T_1}(S, X, T_2) - p_{T_1}(S, X, T_2) = S_{T_1} \cdot e^{-q\cdot(T_2-T_1)} - X \cdot e^{-r\cdot(T_2-T_1)}.$$

Portanto,

O cliente irá escolher a put se $c_{T_1}(S,X,T_2) < p_{T_1}(S,X,T_2)$ i.e. se $S_{T_1} \cdot e^{-q\cdot(T_2-T_1)} < X \cdot e^{-r\cdot(T_2-T_1)} \Leftrightarrow S_{T_1} < X \cdot e^{-r\cdot(T_2-T_1)} \cdot e^{q\cdot(T_2-T_1)}$. Neste caso, teremos de:

1) Vender a call (recebendo $c_{T_1}(S,X,T_2)$); e
2) Exercer a put (recebendo $e^{-q\cdot(T_2-T_1)} \cdot \left[X \cdot e^{-(r-q)\cdot(T_2-T_1)} - S_{T_1}\right]$).

Somando os 2 cash-in flows,

$$\begin{aligned}
&c_{T_1}(S,X,T_2) + e^{-q\cdot(T_2-T_1)} \cdot \left[X \cdot e^{-(r-q)\cdot(T_2-T_1)} - S_{T_1}\right] \\
&= c_{T_1}(S,X,T_2) + X \cdot e^{-r\cdot(T_2-T_1)} - S_{T_1} \cdot e^{-q\cdot(T_2-T_1)} \\
&= p_{T_1}(S,X,T_2).
\end{aligned}$$

A última igualdade resulta da paridade put-call mas pressupõe que “r” e “q” são iguais entre t e T_1 e entre T_1 e T_2.

c) Deduza a fórmula de avaliação de uma *European-style down-and-out put* com uma barreira (L) inferior ao *strike* (X) e sem *rebate*.

Via página 52 dos apontamentos,

$$DO(-1)_t\,(S;X;L<X;R=0;T)$$

$$= e^{-r\tau} \int_{\ln\left(\frac{L}{S_t}\right)}^{\ln\left(\frac{X}{S_t}\right)} \left(X - S_t e^{y}\right) \left\{ \phi(y;\mu\tau,\sigma\sqrt{\tau}) - \left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \phi\left[y; 2\ln\left(\frac{L}{S_t}\right) + \mu\tau, \sigma\sqrt{\tau}\right] \right\} dy.$$

Fazendo a mudança de variável de integração $z = y - 2\ln\left(\frac{L}{S_t}\right)$,

$$DO(-1)_t(S;X;L<X;R=0;T)$$

$$= e^{-r\tau}\int_{\ln\left(\frac{L}{S_t}\right)}^{\ln\left(\frac{X}{S_t}\right)}\left(X-S_te^{y}\right)\phi\left(y;\mu\tau,\sigma\sqrt{\tau}\right)dy$$

$$-\left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}e^{-r\tau}\int_{\ln\left(\frac{L}{L^2/S_t}\right)}^{\ln\left(\frac{X}{L^2/S_t}\right)}\left[X-S_t\left(\frac{L}{S_t}\right)^2e^{z}\right]\phi\left(z;\mu\tau,\sigma\sqrt{\tau}\right)dz$$

$$= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{X}{S_t}\right)}\left(X-S_te^{y}\right)\phi\left(y;\mu\tau,\sigma\sqrt{\tau}\right)dy-e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{L}{S_t}\right)}\left[(X-L)+\left(L-S_te^{y}\right)\right]\phi\left(y;\mu\tau,\sigma\sqrt{\tau}\right)dy$$

$$-\left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{X}{L^2/S_t}\right)}\left[X-\frac{L^2}{S_t}e^{z}\right]\phi\left(z;\mu\tau,\sigma\sqrt{\tau}\right)dz$$

$$+\left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\ln\left(\frac{L}{L^2/S_t}\right)}\left[(X-L)+\left(L-\frac{L^2}{S_t}e^{z}\right)\right]\phi\left(z;\mu\tau,\sigma\sqrt{\tau}\right)dz.$$

$$DO(-1)_t(S;X;L<X;R=0;T)$$

$$= p_t(S_t,X,T)-p_t(S_t,L,T)-e^{-r\tau}(X-L)\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{L}{S_t}\right)-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

$$-\left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}p_t\left(\frac{L^2}{S_t},X,T\right)+\left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}c_t\left(\frac{L^2}{S_t},L,T\right)+\left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}e^{-r\tau}(X-L)\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_t}{L}\right)-\mu\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right]$$

$$= p_t(S_t,X,T)-p_t(S_t,L,T)-e^{-r\tau}(X-L)\Phi\left[-d_2^M(S_t,L)\right]$$

$$-\left(\frac{L}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}}\left\{p_t\left(\frac{L^2}{S_t},X,T\right)-c_t\left(\frac{L^2}{S_t},L,T\right)-e^{-r\tau}(X-L)\Phi\left[-d_2^M(L,S_t)\right]\right\}.$$

CASO 2

a)

$$r: \quad e^{r\times 0.5} = 1 + 0.1\% \times {}^{6}\!/_{12} \Rightarrow r = 2\times \ln\left(1 + 0.1\% \times {}^{6}\!/_{12}\right) \cong 0.1\%.$$

$$S_{5,7} = \quad 10{,}742.59 \times \exp\left\{\left[0.1\% - 3.401\% - \frac{(0.25)^2}{2}\right]\times \frac{1}{12} + (-1.8908)\times 0.25 \times \sqrt{\frac{1}{12}}\right\}$$

$$S_{5,7} \cong 9{,}322.28\ .$$

$$\begin{aligned} V_{6,3} &= \max(8{,}899.63 - 6{,}900\,;0)\times 1_{\{Smaax \geq 7{,}500\}} \\ &= \max(1{,}999.63;0)\times 1_{\{8{,}899.63 \geq 7{,}500\}} \\ &= 1{,}999.63. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{6,6} &= \max(6{,}224.20 - 6{,}900\,;0)\times 1_{\{Smaax \geq 7{,}500\}} \\ &= 0 \times 1_{\{6{,}909.35 \geq 7{,}500\}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

b)

$$\hat{V}_0 = e^{-0.1\%\times 0.5} \times \frac{6{,}457.63}{10} \cong 645.44\,.$$

$$\sigma\left(\hat{V}_0\right) = \frac{e^{-0.1\%\times 0.5}}{\sqrt{10}} \times \sqrt{\frac{11{,}505{,}232.20 - {}^{(6{,}457.63\ )^2}\!/_{10}}{10-1}} \cong 285.34\,.$$

c)

Valor actual do depósito:

$$B_0 = \frac{100\%}{1+0.1\% \times 6/12} + RV_0.$$

Por seu turno,

$$RV_{6M} = 10\% \times 1_{\{Smiin<6,900\times 70\% \vee Smaax>6,900\times 130\%\}}$$

$$= 10\% \times 1_{\{Smiin<4,830 \vee Smaax>8,970\}}.$$

A condição contida na anterior função indicadora apenas é satisfeita nas simulações 7, 8 e 9:

j	Indicator	$V_{T,j}$
1	0	-
2	0	-
3	0	-
4	0	-
5	0	-
6	0	-
7	1	10%
8	1	10%
9	1	10%
10	0	-
	total:	0.30

Consequentemente,

$$RV_0 = e^{-0.1\%\times 0.5} \times \frac{0.3}{10} \cong 2.99\%.$$

Portanto,

$$B_0 = 99.65\% + 2.99\% = 102.64\% > 100\% \Rightarrow \text{ Depositar.}$$

CASO 3

a) Formule uma decisão de *trading* para um depósito bancário com vencimento a 12 meses e com uma remuneração igual 5% caso o índice Dax30 não desvalorize mais do que 10% daqui a 1 ano.

Designando a cotação do índice Dax30 por "S",

$$RV_{12M} = \begin{cases} 5\% \Leftarrow S_{12M} > 12{,}000 \times 90\% \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= 5\% \times c_{12M}^{d}\left(S; X = 12{,}000 \times 90\%; T = 12M; M = 1\right).$$

Portanto,

$$r: \quad e^{r \times 12/12} = 1 + 0.2\% \times 12/12 \Rightarrow r = \ln(1 + 0.2\%) \cong 0.1998\%.$$

$$B_0 = 100\% \times e^{-0.1998\%} + RV_0,$$

e

$$RV_0 = 5\% \times c_0^{d}\left(S; X = 12{,}000 \times 90\% = 10{,}800; T = 12M; M = 1\right)$$

$$= 5\% \times e^{0.1998\%} \times N\left[d_2^M(10{,}800)\right].$$

$$\begin{aligned} N\left[d_2^M(10{,}800)\right] &= N\left[\frac{\ln\left(12{,}000/10{,}800\right) + \left(0.1998\% - 1\% - (0.2)^2/2\right) \times 1}{0.2 \times \sqrt{1}}\right] \\ &= N(0.3868) \\ &\cong N(0.39) \\ &= 0.6517. \end{aligned}$$

$$RV_0 = 5\% \times e^{-0.1998\%} \times 0.6517 \cong 3.25\%.$$

$$B_0 = 99.80\% + 3.25\% \cong 103.05\% > 100\% \Rightarrow \text{ Investir.}$$

b) Reformule a resposta à alínea anterior assumindo que a remuneração de 5% é liquidada daqui a 12 meses caso o índice Dax30 nunca desça abaixo dos 10,800 pontos de índice em qualquer momento durante os próximos 12 meses.

$$B_0 = 100\% \times e^{-0.1998\%} + RV_0,$$

Por seu turno,

$$RV_{12M} = \begin{cases} 5\% \Leftarrow \inf\limits_{0<u<12M} (S_u) > 10,800 \\ 0\% \Leftarrow ELSE \end{cases}$$

$$= 5\% \times 1_{\left\{\inf\limits_{0<u<12M} (S_u) > 10,800\right\}}$$

Portanto,

$$RV_0 = 5\% \times e^{-0.1998\%} \times \Pr\left[\inf_{0<u<12M} (S_u) > 10,800\right]$$

Visto que a RV corresponde ao valor actual de um knock-in rebate igual a 5% e associado a uma down barrier igual a 10,800 pontos de índice, podemos usar a Proposição 48 dos apontamentos com $\eta = -1$ para calcular a probabilidade:

$$\Pr\left[\inf_{0<u<12M} (S_u) > 10,800\right]$$

$$= N\left[d_2^M (12,000;10,800)\right] - \left(\frac{12,000}{10,800}\right)^{\frac{2\mu}{0.2^2}} N\left[d_2^M (10,800;12,000)\right],$$

sendo

$$\mu = r - q - \sigma^2/2 = 0.1998\% - 1\% - (0.2)^2/2 = -0.028.$$

Via alínea anterior,

$$N\left[d_2^M (12,000;10,800)\right] = 0.6517.$$

$$N\left[d_2^M(10{,}800;12{,}000)\right] = N\left[\frac{\ln\left(10{,}800 \big/ 12{,}000\right) + \left(0.1998\% - 1\% - (0.2)^2 \big/ 2\right)\times 1}{0.2\times\sqrt{1}}\right]$$

$$\begin{aligned} &= N(-0.6668) \\ &\cong N(-0.67) \\ &= 1 - N(0.67) \\ &= 1 - 0.7486 \\ &= 0.2514. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Pr\left[\inf_{0<u<12M}(S_u) > 10{,}800\right] = 0.6517 - \left(\frac{12{,}000}{10{,}800}\right)^{\frac{2\times(-0.028)}{0.2^2}} \times 0.2514 \cong 0.357973,$$

$$RV_0 = 5\% \times e^{-0.1998\%} \times 0.357973 \cong 1.786\%,$$

e

$$B_0 = 99.80\% + 1.786\% \cong 101.587\% > 100\% \Rightarrow \text{ Investir.}$$

c) Formule uma decisão de investimento relativamente a uma obrigação de caixa emitida ao par com um valor nominal de €5,000,000, com reembolso *bullet* e a 97% do par daqui a 12 meses e com uma remuneração igual a 60% da taxa de desvalorização do índice Dax30, desde que tal índice nunca acima dos 12,200 pontos durante os próximos 12 meses.

$$B_0 = 97\% \times e^{-0.1998\%} + RV_0.$$

Relativamente à componente de remuneração variável,

$$RV_{12M} = \begin{cases} 60\% \times \max\left(0\%; \dfrac{S_0 - S_{12M}}{S_0}\right) \Leftarrow \sup\limits_{0<u\leq 12M} (S_u) < 12{,}200 \\ 0\% \Leftarrow \sup\limits_{0<u\leq 12M} (S_u) \geq 12{,}200 \end{cases}$$

$$= \frac{60\%}{S_0} \times \max(0; S_0 - S_{12M}) \times 1_{\left\{\sup\limits_{0<u\leq 12M} (S_u) < 12{,}200\right\}}$$

$$= \frac{60\%}{S_0} \times p_{12M}^{uo}(S_{12M}; X = S_0; H = 12{,}200; R = 0; T = 12M).$$

Portanto, a remuneração variável é dada por uma up-and-out zero rebate put, i.e.

$$RV_0 = \frac{60\%}{S_0} \times p_0^{uo}(S_0; X = S_0; H = 12{,}200; R = 0; T = 12M).$$

A down-and-out call sem rebate é avaliada com base na seguinte expressão:

$$p_t^{uo}(S; X; H; T)$$

$$= p_t(S_t; \min(H; X); T) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} p_t\left(\frac{H^2}{S_t}; \min(H; X); T\right)$$

$$+ [X - \min(H; X)] e^{-r\tau} \left\{ N[-d_2^M(S_t, H)] - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} N[-d_2^M(H, S_t)] \right\}$$

Atendendo a que X=12,000<H=12,200, então a expressão anterior pode ser escrita como:

$$p_t^{uo}(S; X; H; T)$$

$$= p_t(S_t; \min(H; X); T) - \left(\frac{H}{S_t}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} p_t\left(\frac{H^2}{S_t}; \min(H; X); T\right)$$

Considerando os dados em apreço, e visto que $\mu = 0.1998\% - 1\% - {(0.2)^2}/{2} = -0.028$:

$$p_0^{uo}\left(S_0 = 12{,}000; X = 12{,}000; H = 12{,}200; R = 0; T = 12M\right)$$

$$= p_0\left(12{,}000; 12{,}000; 12M\right) - \left(\frac{12{,}200}{12{,}000}\right)^{\frac{2\times(-0.028)}{0.2^2}} p_0\left(\frac{12{,}200^2}{12{,}000}; 12{,}000; 12M\right)$$

$$= 998.64 - \left(\frac{12{,}200}{12{,}000}\right)^{\frac{2\times(-0.028)}{0.2^2}} p_0\left(\frac{12{,}200^2}{12{,}000}; 12{,}000; 12M\right),$$

sendo que a última linha decorre do enunciado.

Visto que o valor de uma standard call ou put option é uma função homógenera de grau 1 no spot e no strike, então

$$p_0^{uo}\left(S_0 = 12{,}000; X = 12{,}000; H = 12{,}200; R = 0; T = 12M\right)$$

$$= 998.64 - \left(\frac{12{,}200}{12{,}000}\right)^{\frac{2\times(-0.028)}{0.2^2}} p_0\left(\frac{12{,}200^2}{12{,}000}; 12{,}000; 12M\right)$$

$$= 998.64 - \left(\frac{12{,}200}{12{,}000}\right)^{\frac{2\times(-0.028)}{0.2^2}} \times \frac{12{,}200^2}{12{,}000^2} \times p_0\left(12{,}000; \frac{12{,}000^3}{12{,}200^2} \cong 11{,}609.78; T = 12M\right)$$

$$= 998.64 - \left(\frac{12{,}200}{12{,}000}\right)^{\frac{2\times(-0.028)}{0.2^2}} \times \frac{12{,}200^2}{12{,}000^2} \times 794.95$$

$$\cong 195.77.$$

Em suma,

$$RV_0 = \frac{60\%}{12{,}000} \times 195.77 \cong 0.98\%,$$

e

$$B_0 = 96.81\% + 0.98\% \cong 97.79\% < 100\% \Rightarrow \text{Não investir.}$$

d) Determine a estratégia de *static hedging* a implementar pelo banco emitente relativamente à emissão definida na alínea anterior. Utilize somente opções standard.

d.1) O hedging da componente "obrigação clássica" é feito mediante depósito a 12 meses, à taxa efectiva anual de 0.2% e no valor de $\frac{97\% \times €5,000,000}{1+0.2\%} \cong 96.81\% \times €5,000,000 = €4,840,319$.

d.2) RV oferecida ao cliente daqui a 12 meses: Investir $\frac{60\%}{12,000} \times €5,000,000$ numa posição longa sobre a up-and-out put $p_0^{uo}(S_0; X = S_0; H = 12,200; R = 0; T = 12M)$. Tal é equivalente a comprar a put ATM standard $p_0(12,000;12,000;12M)$ com um contract size igual a $\frac{60\%}{12,000} \times €5,000,000$ e a vender a put OTM standard $p_0(12,000;11,609.78;T = 12M)$ com um contract size igual a $\frac{60\%}{12,000} \times €5,000,000 \times \left(\frac{12,200}{12,000}\right)^{\frac{2\times(-0.028)}{0.2^2}} \times \frac{12,200^2}{12,000^2}$.

e) A instituição financeira EVN pretende emitir ao par obrigações de caixa com um valor nominal de €10,000,000, com reembolso *bullet* e a 95% do par daqui a 12 meses e com a seguinte remuneração variável a liquidar semestralmente: 40% da taxa de valorização semestral do índice Dax30. Formule uma decisão de *trading*.

$$B_0 = 95\% \times e^{-0.1998\%} + RV_{6M}(0) + RV_{12M}(0).$$

Relativamente à componente de remuneração variável a receber daqui a 6M:

$$\begin{aligned} RV_{6M}(0) &= 40\% \times \max\left(0\%; \frac{S_{6M} - S_0}{S_0}\right) \\ &= \frac{40\%}{S_0} \times \max(0; S_{6M} - S_0) \\ &= \frac{40\%}{S_0} \times c_{6M}(S_{6M}; X = S_0; 1Y). \end{aligned}$$

Portanto, o valor actual da remuneração variável do 1º semestre é dado por:

$$RV_{6M}(0) = \frac{40\%}{12{,}000} \times c_0(S_0; X = 12{,}000; 6M)$$

$$= \frac{40\%}{12{,}000} \times 648.02 \cong 2.16\%.$$

Relativamente à componente de remuneração variável a receber daqui a 12M:

$$\begin{aligned} RV_{12M}(12M) &= 40\% \times \max\left(0\%; \frac{S_{12M} - S_{6M}}{S_{6M}}\right) \\ &= \frac{40\%}{S_{6M}} \times \max(0; S_{12M} - S_{6M}) \\ &= \frac{40\%}{S_{6M}} \times c_{12M}(S_{12M}; X = S_{6M}; 12M). \end{aligned}$$

Daqui a 6 meses, o valor da remuneração variável do 2º semestre é dado por:

$$\begin{aligned} RV_{12M}(6M) &= \frac{40\%}{S_{6M}} \times c_{6M}(S_{6M}; X = S_{6M}; 12M) \\ &= \frac{40\%}{S_{6M}} \times S_{6M} \times c_{6M}(S = 1; X = 1; 12M). \end{aligned}$$

Portanto, o valor actual da remuneração variável do 2º semestre é dado por:

$$RV_{12M}(0) = \frac{40\%}{1 + 0.1\% \times 6/12} \times c_{6M}(S = 1; X = 1; 12M)$$

$$= \frac{40\%}{1 + 0.1\% \times 6/12} \times \frac{c_0(S = 12{,}000; X = 12{,}000; 6M)}{12{,}000}$$

$$= \frac{40\%}{1 + 0.1\% \times 6/12} \times \frac{648.02}{12{,}000}$$

$$\cong 2.159\%.$$

Em suma,

$B_0 = 95\% \times e^{-0.1998\%} + 2.16\% + 2.159\% \cong 99.129\% < 100\% \Rightarrow$ Não comprar.