

**OPÇÕES EXÓTICAS**  
**MSc MATEMÁTICA FINANCEIRA 2016/17**  
**EXAME**

**31/07/17**

**Duração: 2.5 horas**

**CASO 1 (2x2=4 valores)**

Responda (sucinta e objectivamente) a somente duas das questões seguintes:

- a) Deduza a fórmula de avaliação de um *non-deferrable knock-out rebate* para uma *down-and-out option*, assumindo um *geometric Brownian motion* para o preço do activo subjacente e tendo em conta que

$$Q^*(\tau_L \in dv | F_t) = \frac{-\ln\left(\frac{L}{S_t}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi(v-t)^3}} \exp\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{L}{S_t}\right) - \Psi(v-t)\right]^2}{2\sigma^2(v-t)}\right\} dv$$

é a densidade do 1º tempo de passagem do preço do activo subjacente pela barreira inferior, mas numa medida de probabilidade equivalente  $Q^*$  na qual o processo  $y_u := \ln\left(\frac{S_u}{S_t}\right)$  segue a seguinte SDE:  $dy_t = \Psi dt + \sigma dW_t^{Q^*}$ .

- b) Deduza a função densidade de probabilidade do supremo registado durante o intervalo de tempo  $[t, T]$  pelo preço “S” de um activo que segue um *geometric Brownian motion*.
- c) Deduza uma relação de paridade *put-call* para *cash-or-nothing options*.

**CASO 2 (3 valores)**

Considere as seguintes informações relevantes para a avaliação de opções Europeias sobre o índice Dow Jones<sup>1</sup> e cotadas em USD:

- Libor a 3 meses: 1.426% (30/360);
- Volatilidade anualizada do índice Dow Jones: 25%;
- Cotação *spot* do índice Dow Jones = 20,940.51 pontos de índice;
- *Dividend yield* esperada para o índice Dow Jones = 1% (em regime de capitalização contínua);
- Despreze o *credit spread* entre o mercados interbancário e a dívida pública com *rating* AAA.

Nos dois quadros seguintes efectuem-se 10 simulações da evolução do índice Dow Jones ao longo dos próximos 3 meses, considerando intervalos de tempo quinzenais. Para cada simulação, as quatro últimas colunas do segundo quadro incluem as cotações máxima e mínima registadas pelo índice Dow Jones em cada simulação (excluindo a cotação actual), o *payoff* terminal de uma *European down-and-in ATM*

<sup>1</sup> Carteira denominada em USD.

put sobre o índice Dow Jones, com barreira igual a 20,800 pontos de índice e com vencimento a 3 meses, bem como o respectivo quadrado.

Random numbers from $N(0,1)$						
$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	0.7880	1.0488	0.6087	-1.8867	-0.4306	-0.4489
2	0.1461	1.6857	0.9307	0.1445	-0.5948	-2.1143
3	0.3624	-1.2308	0.0804	0.6545	-0.5438	0.5766
4	1.0100	1.3125	2.2784	0.4630	-1.5597	-0.6482
5	-1.5939	0.5767	-0.3519	0.4012	-0.7491	-0.6339
6	-1.2964	0.5049	-0.4463	0.0101	-0.8419	0.1120
7	-0.2726	-0.9741	0.0280	-1.0631	0.6667	-0.2898
8	0.7019	-0.3376	-1.3726	0.3089	-0.0407	-0.3119
9	-1.5184	1.7852	0.5203	0.7539	-0.0744	0.8168
10	0.1295	0.6036	-0.1093	-0.9400	0.7887	0.5930

Paths for underlying asset price										$V_{T,j}$	$(V_{T,j})^2$
$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6	Smin	Smax		
1	20,940.51	21,775.25	22,946.63	23,643.93	21,449.53	20,959.75	20,462.05	20,462.05	23,643.93		
2	20,940.51	21,073.44	22,940.61	24,029.41	24,180.04	23,430.70	21,010.54	21,010.54	24,180.04	?	
3	20,940.51	21,307.37	19,987.70	20,047.35	20,704.94	20,115.59	20,692.95	19,987.70	21,307.37		
4	20,940.51	22,023.27	23,522.43	26,392.92	26,993.49	24,900.27	24,063.00	22,023.27	26,993.49		
5	20,940.51	19,282.98	19,836.53	19,461.60	19,841.84	19,076.19	18,448.19	18,448.19	19,841.84		
6	20,940.51	19,577.92	20,066.34	19,592.47	19,580.48	18,735.97	18,822.20	18,735.97	20,066.34		
7	20,940.51	20,628.02	19,605.64	19,611.62	18,555.10	19,175.66	18,872.94	18,555.10	20,628.02		
8	20,940.51	21,679.75	21,285.50	19,823.20	20,115.49	20,051.20	19,712.43	19,712.43	21,679.75	?	
9	20,940.51	19,357.38	21,179.87	21,725.27	22,552.04	22,441.31	23,370.22	19,357.38	23,370.22		
10	20,940.51	21,055.59	?	21,544.96	20,512.81	21,331.18	21,961.83	20,512.81	21,961.83		
total										8,632.31	16,772,151.93

Pretende-se que:

- Calcule os três valores assinalados por pontos de interrogação nos dois quadros anteriores. (1.5 valores)
- Avalie a opção em apreço e calcule o desvio-padrão de tal estimativa. (1 valor)
- Reavalie a opção em apreço, admitindo agora estar definido um rebate de 100 pontos de índice. (0.5 valores)

### **CASO 3 (13 valores)**

Considere as seguintes condições de mercado:

- Taxas Libor do USD: 1.426% a 3 e a 6 meses (base de calendário 30/360);
- Volatilidade anualizada do índice Dow Jones:<sup>2</sup> 25%;
- *Dividend yield* estimada para o índice Dow Jones: 1% (capitalização contínua);
- Cotação *spot* do índice Dow Jones = 20,940.51 pontos de índice;
- O mercado transacciona *European standard options* sobre o índice Dow Jones, com vencimento a 3 e a 6 meses e um *contract size* igual a USD10, com os seguintes prémios (*mid*) em pontos de índice:

<sup>2</sup> Carteira denominada em USD.

	3 months				6 months			
strikes	18,846.46	18,972.14	20,918.49	20,940.51	18,846.46	18,972.14	20,940.51	22,000.00
CALL - premium	2,379.90	2,282.59	1,061.98	1,051.45	2,703.04	2,616.72	1,487.99	1,052.16
PUT - premium	271.30	299.23	1,018.07	NA	580.01	618.48	1,444.18	2,060.35

Pretende-se que:

- Formule uma decisão de *trading* para um depósito bancário denominado em USD, com vencimento a 6 meses e com uma remuneração igual 5% caso o índice Dow Jones ultrapasse os 22,000 pontos de índice (exactamente) daqui a 6 meses. (2V)
- Formule uma decisão de trading para outro depósito bancário denominado em USD, com vencimento a 6 meses e com uma remuneração variável igual a 2.5% (daqui a 6 meses) caso o índice Dow Jones nunca suba acima dos 22,000 pontos de índice durante os próximos 6 meses. (3V)
- Formule uma decisão de trading para uma obrigação emitida ao par e com um valor nominal igual a US\$100,000,000, com reembolso bullet e ao par daqui a 6 meses, e com uma remuneração variável (a liquidar daqui a 6 meses) igual a 60% da taxa de desvalorização do índice Dow Jones index, caso este índice nunca suba acima dos 22,000 pontos de índice durante os próximos 6 meses. (4V)
- Calcule o *fair value* de uma European-style put sobre o índice Dow Jones, com um strike igual a 90% do valor do índice daqui a 3 meses e com vencimento daqui a 6 meses. Para o efeito, assuma que o FRA 3x6 está actualmente cotado a 1.426%. (2V)
- Formule uma estratégia de *static hedging* para uma posição curta sobre uma *as-you-like-it option* simples sobre o índice Dow Jones, com vencimento a 6 meses, com *strike* igual a 20,940.51 pontos de índice e data de determinação (do tipo de opção) daqui a 3 meses. (2V)