

OPÇÕES EXÓTICAS
MSc MATEMÁTICA FINANCEIRA 2009/10
EXAME

29/07/10

Duração: 2.5 horas

CASO 1 (2x2.0=4 valores)

Responda (sucinta e objectivamente) a somente duas das questões seguintes:

- a) Formule, no momento “ t ” ($\leq T$), o cálculo do fair value de um depósito com vencimento no momento “ T ”, e que se valoriza à taxa de juro α (em regime de capitalização contínua) caso o índice CAC40 não ultrapasse o nível “ U ” até momento “ T ”; caso contrário, i.e. caso o índice CAC40 ultrapasse o nível “ U ” até momento “ T ”, então o depósito será capitalizado à taxa de juro α (em regime de capitalização contínua) até à data em que o nível “ U ” é alcançado e à taxa de juro $\beta(>\alpha)$ (em regime de capitalização contínua) desde essa data e até ao momento “ T ”.
- b) Considere uma *standard European put* e uma *European asset-or-nothing put* sobre o mesmo índice bolsista, com igual *strike*, com a mesma maturidade e ambas com um *contract size* igual a 5 EUR. Sabendo que as duas opções estão actualmente cotadas a EUR7.0917 e EUR21.6522, respectivamente, e que o *present value* do *strike* é igual a EUR49.5025, determine a probabilidade de as duas puts terminarem *in-the-money*.
- c) Deduza a fórmula de avaliação de uma *European-style down-and-out call* com uma barreira (L) superior ao *strike* (X).

CASO 2 (6 valores)

Considere as seguintes informações relevantes para a avaliação de opções Europeias sobre o índice DAX¹ e cotadas em euros:

- Euribor a 6 meses: 1.2% (30/360);
- Volatilidade anualizada do DAX: 30%;
- *Dividend yield* estimada para o DAX: 1.799% (regime de capitalização contínua);
- Cotação *spot* do índice DAX = 6,000 pontos de índice;
- Despreze o *credit spread* entre os mercados interbancário e de dívida pública.

Nos dois quadros seguintes efectuem-se 20 simulações da evolução do índice DAX ao longo dos próximos 6 meses, considerando intervalos de tempo mensais. Para cada simulação, as quatro últimas colunas do segundo quadro incluem as cotações mínima e máxima registadas pelo índice DAX em cada simulação, o *payoff* terminal de uma *European down-and-in ATM put* sobre o índice DAX, com vencimento a 6 meses, e *barrier level* igual a 5,900 pontos, bem como o respectivo quadrado.

¹ Carteira denominada em EUR.

Random numbers from $N(0,1)$						
j \ i	1	2	3	4	5	6
1	-0.30023	-1.27768	0.244257	1.276474	1.19835	1.733133
2	-2.18359	-0.23418	1.095023	-1.0867	-0.6902	-1.69043
3	-1.84691	-0.97763	-0.77351	-2.11793	-0.56792	-0.40405
4	0.134853	-0.36549	-0.32699	-0.37024	1.342642	-0.08528
5	-0.18616	-0.51321	1.972212	0.865673	2.375655	-0.65491
6	1.661456	-1.6124	0.538948	0.902191	1.918916	-0.08452
7	-0.5238	0.675138	-0.38132	0.757611	-1.44419	-0.84724
8	?	-0.36288	-0.03248	0.028117	-0.32272	2.194502
9	-1.74248	-0.73648	-2.57758	1.44767	-1.27976	-0.65358
10	0.757714	0.466712	0.874609	0.595742	-1.37185	-1.11574
11	0.693994	0.322636	-0.93984	-0.24095	0.131536	0.557798
12	0.138715	-0.91096	1.884846	0.487198	0.072239	0.829841
13	0.862008	-0.63653	-0.92319	1.111189	-1.20118	-1.55889
14	0.711325	0.638406	2.205688	1.443755	1.303904	0.11296
15	0.001951	0.453701	-0.02551	-1.05468	-1.77481	0.828331
16	0.444224	0.617906	0.213473	-1.02693	1.238195	-0.31121
17	-0.83992	-0.82113	-0.42899	-0.45336	-0.5238	0.849429
18	0.513207	-0.6083	1.304979	-1.76094	0.550572	-0.11627
19	0.041741	-0.65405	-0.54959	0.84932	0.803045	0.456416
20	0.691368	1.630624	0.303914	0.588996	1.852836	-0.33556

Paths for underlying asset price										$V_{T,j}$	$(V_{T,j})^2$
j \ i	0	1	2	3	4	5	6	Smin	Smax		
1	6,000.00	5,821.20	5,189.33	5,277.78	5,869.67	6,483.93	7,501.99	5,189.33	7,501.99	-	
2	6,000.00	4,945.13	4,825.29	5,282.77	4,787.88	?	3,862.88	3,862.88	5,282.77	2,137.12	
3	6,000.00	5,091.44	4,658.26	4,337.96	3,595.68	3,408.58	3,277.41	3,277.41	5,091.44	2,722.59	
4	6,000.00	6,044.73	5,831.54	5,644.67	5,443.35	6,088.61	6,018.16	5,443.35	6,088.61	-	
5	6,000.00	5,878.99	5,599.56	6,614.31	7,098.99	8,683.62	8,170.00	5,599.56	8,683.62	-	
6	6,000.00	6,899.12	5,974.52	6,233.43	6,711.39	7,891.11	7,800.33	5,974.52	7,891.11	-	
7	6,000.00	5,709.58	6,027.68	5,807.13	6,174.61	5,425.57	5,020.34	5,020.34	6,174.61	979.66	
8	6,000.00	5,236.93	5,053.38	5,017.80	5,008.70	4,849.98	5,840.24	4,849.98	5,840.24	159.76	
9	6,000.00	5,137.69	4,799.78	3,823.22	4,315.50	3,846.37	3,619.29	3,619.29	5,137.69	2,380.71	
10	6,000.00	6,379.74	6,614.69	7,104.90	7,449.34	6,586.80	5,954.75	5,954.75	7,449.34	-	
11	6,000.00	6,344.63	6,496.72	5,963.48	5,815.55	5,857.21	6,121.02	5,815.55	6,496.72	-	
12	6,000.00	6,046.75	5,564.33	6,523.15	6,775.40	6,788.99	7,263.89	5,564.33	7,263.89	?	
13	6,000.00	6,437.62	6,066.50	5,576.60	6,113.86	5,486.45	4,773.24	4,773.24	6,437.62	?	
14	6,000.00	6,354.16	6,686.87	8,059.98	9,094.70	10,138.72	10,194.95	6,354.16	10,194.95	-	
15	6,000.00	5,975.55	6,188.64	6,148.78	5,588.24	4,771.73	5,104.86	4,771.73	6,188.64	895.14	
16	6,000.00	6,208.87	6,522.37	6,615.89	6,027.23	6,680.99	6,475.73	6,027.23	6,680.99	-	
17	6,000.00	5,555.39	5,152.10	4,943.14	4,732.65	4,503.58	4,826.79	4,503.58	5,555.39	1,173.21	
18	6,000.00	6,246.07	5,900.40	6,578.34	5,623.92	5,873.54	5,790.02	5,623.92	6,578.34	209.98	
19	6,000.00	5,996.18	5,641.94	5,356.87	5,741.27	6,128.65	6,348.69	5,356.87	6,348.69	-	
20	6,000.00	6,343.19	7,274.29	7,436.60	7,792.56	9,110.05	8,811.57	6,343.19	9,110.05	-	
total										11,884.92	22,359,524.14

Pretende-se que:

- Calcule os quatro valores assinalados por pontos de interrogação nos dois quadros anteriores. (2V)
- Avalie a opção em apreço e calcule o desvio-padrão de tal estimativa. (2V)
- Calcule o fair value de uma obrigação de caixa com vencimento daqui a 6 meses, com reembolso bullet e 5% acima do par e com uma remuneração variável igual a 60% da taxa semestral de valorização do índice DAX, caso o mesmo não saia do intervalo entre 5,500 e 7,000 pontos de índice. (2V)

CASO 3 (10 valores)

Considere as seguintes condições de mercado:

- Taxas EURIBOR: 1% a 6 meses; e, 1.5% a 12 meses (base de calendário 30/360);
- Volatilidade anualizada do índice Eurostock50:² 20%;
- *Dividend yield* estimada para o Eurostock50: 2% (capitalização contínua);
- Cotação *spot* do índice Eurostock50 = 3,000.00 pontos de índice;
- O mercado transacciona *European standard options* sobre o índice Eurostock50, com vencimento a 6 e a 12 meses e um *contract size* igual a €10, com os seguintes prémios (*mid*) em pontos de índice:

	6 meses					12 meses	
strikes	2,650	2,700	2,950	3,000	3,050	2,900	3,000
CALL - prémio	377.44	339.66	184.44	160.50	138.87	275.02	227.38
PUT - prémio	44.11	56.08	149.62	175.42	203.55	191.56	242.45

Pretende-se que:

- Formule uma decisão de *trading* para um depósito bancário com vencimento a 6 meses e com uma remuneração igual 8% caso o índice Eurostock50 desvalorize mas menos do que 10%. (2V)
- Avalie uma *put* com *strike* igual a 361.57 pontos de índice, com vencimento a 6 meses e sobre uma *standard ATM put* sobre o Eurostock50 e com vencimento a 1 ano. Para o efeito, considere que uma cotação de 2,700 pontos do índice Eurostock50 a vigorar daqui a 6 meses torna indiferente o exercício da *compound option*. Assuma uma curva de taxas de juro *flat* nos 0.998% (regime de capitalização contínua) até 1 ano e considere as seguintes probabilidades geradas por uma distribuição normal bivariada *standard*: (2V)

a	b	rho	M(a,b;rho)
-0.66589	0.049875	0.707107	0.224125
-0.80731	-0.15012	0.707107	0.179201
0.665886	0.049875	-0.70711	0.295764
0.807307	-0.15012	-0.70711	0.261132
-0.7803	-0.04988	0.707107	0.191141
-0.63887	0.150125	0.707107	0.237071
0.780296	-0.04988	-0.70711	0.28897
0.638874	0.150125	-0.70711	0.322596

- Formule uma decisão de investimento relativamente a um depósito bancário (denominado em EUR) com vencimento a 6 meses e com uma remuneração igual a 40% da taxa de valorização do índice Eurostock50, desde que tal índice desça abaixo dos 2,975.31 pontos durante os próximos 6 meses. Caso o índice Eurostock50 nunca desça abaixo dos 2,975.31 pontos durante os próximos 6 meses, então a remuneração a liquidar no final do semestre será igual a 0.5%. (3V)

² Carteira denominada em EUR.

- d) Formule uma decisão de investimento para um depósito denominado em EUR, com vencimento a 6 meses e com uma remuneração igual a 8% e a liquidar daqui a 6 meses caso o índice Eurostock50 alguma vez desça abaixo dos 2,700 pontos de índice. (3V).