ISCTE – Licenciatura de Finanças
***Investimentos* 2000-2001**
Frequência - Resolução
19/06/2001 Duração: 2.5h + 0.5h

<u>CASO 1</u> (2x1.5=3 valores)

a) Admita dispor de duas alternativas de investimento, com idêntico risco: uma a 1 ano e à taxa (efectiva anual) de 5%; outra a 1.5 anos e à taxa (efectiva anual) de 5.5%. Formule um critério de decisão de investimento.

Taxa forward: $(1+5.5\%)^{1.5} = (1+5\%)\times[1+f(0,1,1.5)]^{0.5} \Rightarrow f(0,1,1.5) \cong 6.51\%$.

Critério de decisão: Se for expectável que a taxa de juro a 6 meses, daqui a 1 ano, seja superior (inferior) a 6.5%, então dever-se-á optar pelo investimento a 1 ano (1.5 anos).

b) Em que circunstâncias são iguais a *yield-to-maturity* e a taxa de rendimento realizado de uma mesma obrigação?

São iguais desde que:
i) a obrigação seja mantida em carteira até à sua data de vencimento; e
ii) todos os *cash flows* intermédios sejam reinvestidos a igual taxa.

c) Numa óptica de minimização do risco de taxa de juro, é preferível deter uma obrigação com uma *duration* reduzida ou uma obrigação com uma convexidade elevada? Justifique.

Quanto menor a duração e quanto maior a convexidade de uma obrigação (ou carteira de obrigações), menor é a exposição face ao risco de taxa de juro. Contudo, é mais importante possuir uma *duration* reduzida na medida em que esta transmite o impacto das variações das taxas de juro enquanto que a convexidade está associada ao quadrado de tais variações.

d) Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: "O Modelo de Tobin pressupõe que todos os investidores escolhem a mesma carteira de activos com risco, independentemente das suas preferências em termos de rentabilidade e risco".

Afirmação falsa. De facto, a carteira de activos com risco (carteira de tangencia) que integra o portfolio óptimo de cada investidor em nada depende da sua função de utilidade ("Teorema da Separação"). Todavia, a carteira de tangencia pode variar de investidor para investidor, por duas razões:
i) Diferentes investidores podem ter acesso a diferentes taxas de juro sem risco;
ii) Diferentes investidores podem avaliar os mesmos títulos de forma diferente –em termos de rentabilidade esperada e de risco- e portanto podem possuir diferentes fronteiras eficientes.

CASO 2 **(4 valores)**

a) $i_{(4)} \equiv$ Taxa de juro efectiva trimestral $= \dfrac{5\%}{4} \cong 1.25\%$.

$T \equiv$ prestação trimestral:

$$1{,}000{,}000 = \frac{T}{(1+1.25\%)^2} + T \times 1 / A_{39|1.25\%}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{1{,}000{,}000}{\dfrac{1}{(1.0125)^2} + \dfrac{1-(1.0125)^{-39}}{0.0125} \times (1.0125)^{-1}} \cong EUR31{,}933.84$$

Mapa de serviço da dívida:

k (trimestres)	A_{k-1}	T	I_k	R_k	A_k
1	1,000,000.00				1,012,500.00
2	1,012,500.00	63,867.68	12,656.25	51,211.43	961,288.57
3	961,288.57	31,933.84	12,016.11	19,917.73	941,370.84

Sendo, por exemplo:

$A_1 = 1{,}000{,}000 \times 1.0125$;
$I_3 = 961{,}288.57 \times 1.25\%$;
$R_3 = 31{,}933.84 - 12{,}016.11$; e
$A_3 = 961{,}288.57 - 19{,}917.73$.

b) $R_{15} = ?$

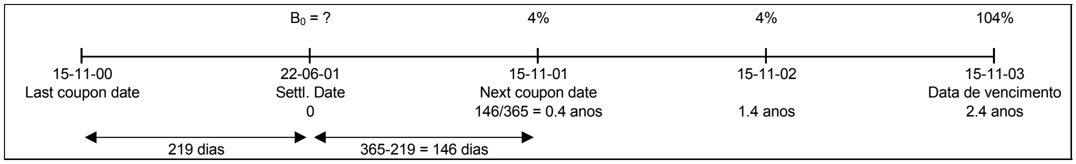
Por exemplo,

$$\begin{aligned} R_{15} &= R_3 \times (1+1.25\%)^{15-3} \\ &= 19{,}917.73 \times (1.0125)^{12} \\ &\cong 23{,}119.60 \end{aligned}$$

CASO 3 **(7 valores)**

a)

Settlement date = 19/06/01 + 3 dias de calendário = 22/06/01.



Portanto,

$$B_0 = \frac{4\%}{[1+r(0,0.4)]^{0.4}} + \frac{4\%}{[1+r(0,1.4)]^{1.4}} + \frac{104\%}{[1+r(0,2.4)]^{2.4}}$$

$$\Leftrightarrow B_0 = \frac{4\%}{[1+4.8\%]^{0.4}} + \frac{4\%}{[1+r(0,1.4)]^{1.4}} + \frac{104\%}{[1+5.25\%]^{2.4}}$$

A taxa spot a 1.4 anos pode ser obtida via interpolação linear:

$$r(0,1.4) \approx 5\% + (5.25\% - 5\%) \times \frac{1.4-1}{2.4-1} \cong 5.071\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{4\%}{[1+4.8\%]^{0.4}} + \frac{4\%}{[1+5.071\%]^{1.4}} + \frac{104\%}{[1+5.25\%]^{2.4}} \cong 99.64\%.$$

$$AI = 4\% \times \frac{219}{365} = 2.4\%.$$

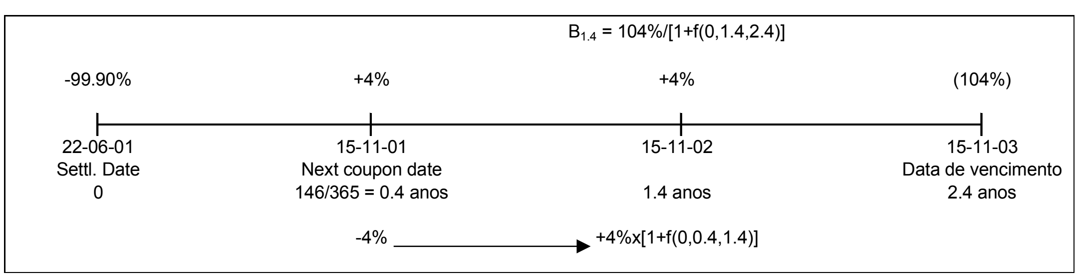
Decisão:

$$VT_0^{bid} = 97.40\% + 2.4\% = 99.80\% > B_0 \Rightarrow \text{ Vender;}$$

$$VT_0^{ask} = 97.50\% + 2.4\% = 99.90\% > B_0 \Rightarrow \text{ Não comprar.}$$

b)

Assumir que as futuras taxas são corresponderão às actuais taxas spot significa definir os seguintes *cash flows* para a operação:



Cálculo das taxas forward:

$$(1+5.071\%)^{1.4}=(1+4.8\%)^{0.4}\times\left[1+\mathrm{f}(0,0.4,1.4)\right]\Rightarrow \mathrm{f}(0,0.4,1.4)\cong 5.18\%;$$

$$(1+5.25\%)^{2.4}=(1+5.071\%)^{1.4}\times\left[1+\mathrm{f}(0,1.4,2.4)\right]\Rightarrow \mathrm{f}(0,1.4,2.4)\cong 5.50\%.$$

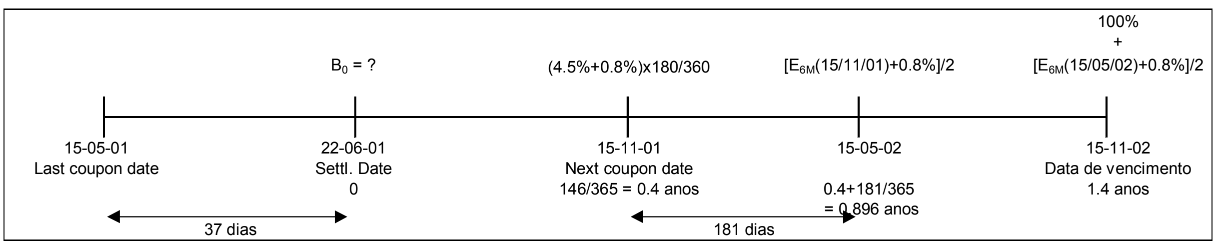
Portanto,

$$99.90\%\times(1+\mathrm{TRR}_{1.4})^{1.4}=4\%\times(1+5.18\%)+4\%+\frac{104\%}{1+5.5\%}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{TRR}_{1.4}\cong 4.876\%.$$

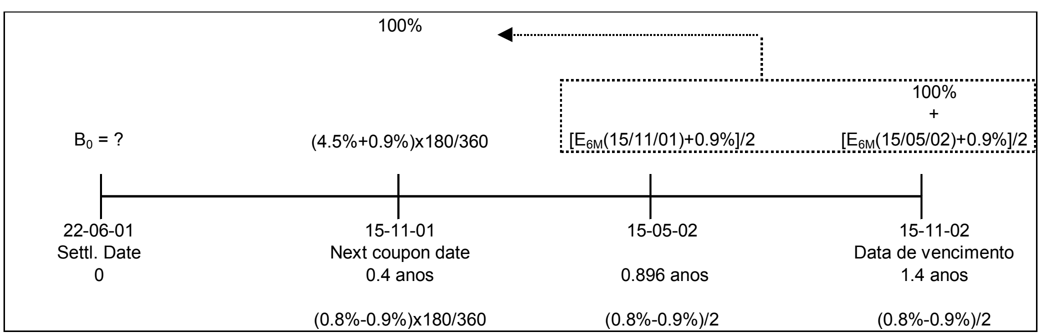
c)

Taxa do próximo cupão = 5.3% $\Rightarrow$ Euribor a 6 meses no dia 15/05/2001 = 5.3%-0.8% = 4.5%.

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:



Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:



$$\mathrm{B}_0=\frac{100\%+\dfrac{4.5\%+0.9\%}{2}}{(1+4.8\%+0.2\%+0.9\%)^{0.4}}$$
$$+\frac{0.8\%-0.9\%}{2}\times\left[(1+5.9\%)^{-0.4}+(1+4.965\%+1.1\%)^{-0.896}+(1+5.071\%+1.1\%)^{-1.4}\right]$$
$$=100.37\%-0.14\%=100.23\%.$$

$$\mathrm{AI}=\frac{5.3\%}{2}\times\frac{37}{180}\cong 0.54\%.$$

Decisão:

$$VT_0^{bid} = 99.61\% + 0.54\% = 100.15\% < B_0 \Rightarrow \text{ Não vender;}$$

$$VT_0^{ask} = 99.65\% + 0.54\% = 100.19\% < B_0 \Rightarrow \text{ Comprar.}$$

d)

Duração de *Fisher-Weil*:

$$DFW = \frac{0.4 \times \frac{4\%}{[1+4.8\%]^{0.4}} + 1.4 \times \frac{4\%}{[1+5.071\%]^{1.4}} + 2.4 \times \frac{104\%}{[1+5.25\%]^{2.4}}}{99.64\%} \cong 2.28 \text{ anos.}$$

$$\lambda: \quad \frac{100\% - 99.64\%}{99.64\%} \approx -2.28 \times \lambda + \frac{1}{2} \times 7.68 \times \lambda^2$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 0.594 \times \lambda - 0.00094 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{0.594 \pm \sqrt{(-0.594)^2 - 4 \times (-0.00094)}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0.596 \quad \vee \quad \lambda = -0.00158.$$

Considera-se o valor de lambda negativo, pois a subida do preço da obrigação deverá resultar de uma descida das taxas de juro.

$$\lambda = -0.00158 \Leftrightarrow \frac{\Delta r(0,0.4)}{1+4.8\%} = -0.00158 \Leftrightarrow \Delta r(0,0.4) = -0.166\%.$$

<u>CASO 4</u> (6 valores)

a)

A actual composição é eficiente sse a sua rentabilidade esperada e desvio-padrão obedecerem à equação da *portfolio frontier* e estiverem "acima" da *minimum variance portfolio*.

$$E(r_p) = 4\% \times 0.5 + 10\% \times 0.2 + 20\% \times 0.3 \cong 10\%.$$

$$\sigma_p^2 = (0.5 \times 0.03)^2 + (0.2 \times 0.2)^2 + (0.3 \times 0.15)^2$$
$$+ 2 \times 0.5 \times 0.2 \times 0.03 \times 0.2 \times (-0.4) + 2 \times 0.5 \times 0.3 \times 0.03 \times 0.15 \times 0.6$$

$$\Leftrightarrow \sigma_p^2 = 0.00418 \Rightarrow \sigma_p \cong 6.465\%.$$

Via equação da *portfolio frontier*:

$$\sigma_p^2 = 0.6722 \times (0.1)^2 - 0.0377 \times 0.1 + 0.001$$
$$= 0.003952$$

$$\Rightarrow \sigma_p \cong 6.286\% < 6.465\%.$$

A actual composição da carteira não é eficiente, uma vez que é possível, para igual taxa de rentabilidade esperada obter um menor nível de risco.

b)

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p^2\}}{MAX} \quad U \equiv \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right]$$

Sujeito a

$$0.6722E(r_p)^2 - 0.0377E(r_p) + 0.001 - \sigma_p^2 = 0$$

e

$$E(r_p) \geq E(r_{mvp})$$

$$\Updownarrow$$

$$\underset{\{E(r_p),\sigma_p^2,\lambda\}}{MAX} \quad L \equiv \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] + \lambda\left[0.6722E(r_p)^2 - 0.0377E(r_p) + 0.001 - \sigma_p^2\right]$$

Sujeito a

$$E(r_p) \geq 2.80\%$$

Condições de primeira ordem:

- $\dfrac{\partial L}{\partial \sigma_p^2} = 0 \Leftrightarrow -6\exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] + \lambda[-1] = 0 \Leftrightarrow \lambda = -6\exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right]$

  $\dfrac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] + \lambda\left[2 \times 0.6722E(r_p) - 0.0377\right] = 0$

- $\Rightarrow \exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] - 6\exp\left[E(r_p) - 6\sigma_p^2\right] \times \left[2 \times 0.6722E(r_p) - 0.0377\right] = 0$

  $\Leftrightarrow 1 - 6 \times \left[2 \times 0.6722E(r_p) - 0.0377\right] = 0 \Leftrightarrow E(r_p) \cong 15.20\% > 2.8\%.$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 0.6722E(r_p)^2 - 0.0377E(r_p) + 0.001 - \sigma_p^2 = 0$$

- $$\Rightarrow \sigma_p^2 = 0.6722 \times (0.152)^2 - 0.0377 \times 0.152 + 0.001 \cong 0.0108$$

$$\Rightarrow \sigma_p \cong 10.39\%.$$

c)

$$r_f = \frac{100\%}{96.15\%} - 1 \cong 4\%$$

$$E(r_M): \quad 10\% = 4\% + [E(r_M) - 4\%] \times 0.8$$

$$\Rightarrow E(r_M) = 11.5\%.$$