**ISCTE – Licenciatura de Finanças**
***Investimentos* 2003-2004 – Frequência**
**Resolução**
**24/06/2004** **Duração: 3h**

**<u>CASO 1</u>**

1. Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: "Uma carteira completamente diversificada pode ser representada simultaneamente sobre a *capital market line* e sobre a *security market line*".

A carteira está sobre a CML sse: $E(r_p) = r_f + \frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M} \sigma_p$.

A carteira está sobre a SML sse: $E(r_p) = r_f + \left[E(r_M) - r_f\right]\beta_p$.

Para que as duas igualdades anteriores sejam válidas em simultâneo é necessário que:

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_M} = \beta_p \Leftrightarrow \sigma_p = \beta_p \sigma_M .$$

Ora, tal acontece precisamente para uma carteira completamente diversificada e, portanto, a afirmação é verdadeira.

2. Comente a seguinte afirmação e classifique-a como sendo verdadeira ou falsa: "O modelo de Gordon não é adequado para avaliar acções de empresas com taxas de crescimentos dos resultados muito elevadas".

Afirmação verdadeira. Para que o modelo de Gordon possa ser aplicado é necessário que g<r, ou seja, é imposto um tecto máximo à taxa de crescimentos dividendos e, portanto, dos resultados.

3. Admita ir receber, daqui a 2 anos, EUR100,000 vezes a seguinte taxa de juro: 1% mais a Euribor a 6 meses em vigor daqui a 1.5 anos. Defina a fórmula de cálculo do valor actual de tal remuneração.

Payoff daqui a 2 anos = $\text{EUR}100{,}000 \times \left[\text{E}_{6\text{M}}(1.5\text{y}) + 1\%\right] = \text{EUR}1{,}000 + \text{EUR}200{,}000 \times \frac{\text{E}_{6\text{M}}(1.5\text{y})}{2}$.

Portanto, o valor actual de tal payoff é dado por: $\mathrm{EUR}1{,}000 \times P(0{,}2) + \mathrm{EUR}200{,}000 \times [P(0{,}1.5) - P(0{,}2)]$, onde P(0,t) designa o factor de desconto (interbancário) a "t" anos.

4. Demonstre que a convexidade de uma carteira de obrigações é igual à média ponderada das convexidades associadas às obrigações componentes.

$$C^c = \frac{\sum_k t_k \times (1+t_k) \times \frac{CF_k^c}{[1+r(0,t_k)]^{t_k}}}{B_0^c}$$

$$= \frac{\sum_k t_k \times (1+t_k) \times \frac{\sum_{j=1}^{p} CF_k^j}{[1+r(0,t_k)]^{t_k}}}{B_0^c}$$

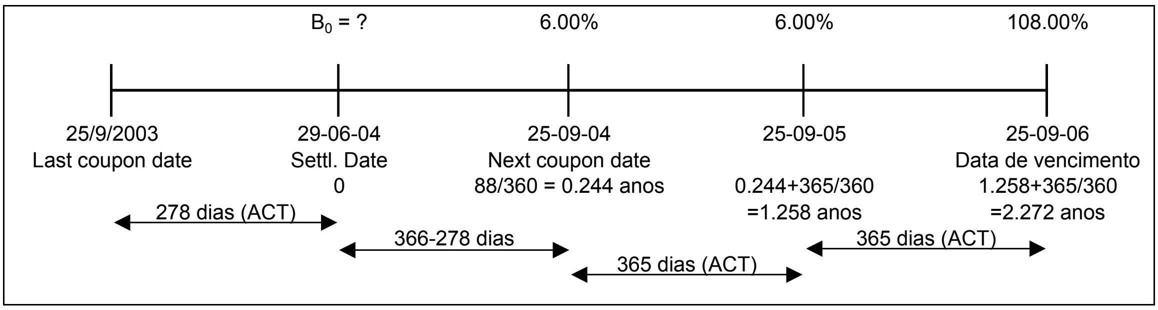
$$= \sum_{j=1}^{p} \frac{\sum_k t_k \times (1+t_k) \times \frac{CF_k^j}{[1+r(0,t_k)]^{t_k}}}{B_0^c}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \frac{\sum_k t_k \times (1+t_k) \times \frac{CF_k^j}{[1+r(0,t_k)]^{t_k}}}{B_0^j} \times \frac{B_0^j}{B_0^c} = \sum_{j=1}^{p} C^j \times \frac{B_0^j}{B_0^c}$$

**CASO 2**

a)

Settlement date = 24/06/04 + 5 dias de calendário = 29/06/04.




Portanto,

$$B_0 = \frac{6\%}{\left[1+r(0,0.244)\right]^{0.244}} + \frac{6\%}{\left[1+r(0,1.258)\right]^{1.258}} + \frac{108\%}{\left[1+r(0,2.272)\right]^{2.272}}.$$

As taxa spot, sem risco, podem ser obtidas via extrapolação e interpolação linear:

$$r(0,0.244) \approx 2.25\% + (2.75\% - 2.25\%) \times \frac{0.244-1}{2-1} \cong 1.872\%;$$

$$r(0,1.258) \approx 2.25\% + (2.75\% - 2.25\%) \times \frac{1.258-1}{2-1} \cong 2.379\%; \text{ e}$$

$$r(0,2.272) \approx 2.75\% + (3.5\% - 2.75\%) \times \frac{2.272-2}{3-2} \cong 2.954\%.$$

Então:

$$B_0 = \frac{6\%}{\left[1+1.872\%\right]^{0.244}} + \frac{6\%}{\left[1+2.379\%\right]^{1.258}} + \frac{108\%}{\left[1+2.954\%\right]^{2.272}} \cong 112.89\%.$$

b)

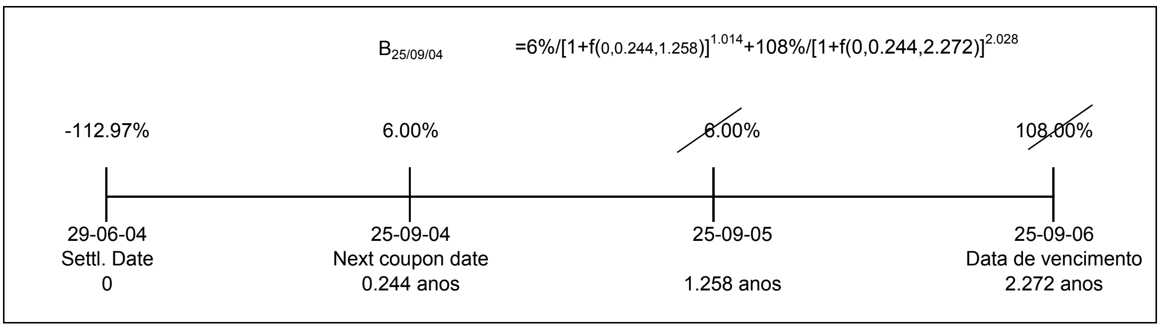
$$VT_0^{ask} = \frac{6\%}{\left[1+2.95\%\right]^{0.244}} + \frac{6\%}{\left[1+2.95\%\right]^{1.258}} + \frac{108\%}{\left[1+2.95\%\right]^{2.272}} \cong 112.84\% < B_0 \Rightarrow \text{ Comprar.}$$

c)

$$AI = 6\% \times \frac{278}{365} \cong 4.57\%.$$

$$VT_0^{ask} = 108.40\% + 4.57\% = 112.97\%.$$

Admitindo que as futuras taxas *spot* irão ser iguais às actuais taxas *forward*,



Taxas de juro *forward*:

$$(1+2.379\%)^{1.258}=(1+1.872\%)^{0.244}\times[1+f(0,0.244,1.258)]^{1.014}\Rightarrow f(0,0.244,1.258)\cong 2.501\%.$$

$$(1+2.954\%)^{2.272}=(1+1.872\%)^{0.244}\times[1+f(0,0.244,2.272)]^{2.028}\Rightarrow f(0,0.244,2.272)\cong 3.085\%.$$

Portanto, TRR:

$$112.97\%\times(1+TRR)^{0.244}=6\%+\frac{6\%}{(1+2.501\%)^{1.014}}+\frac{108\%}{(1+3.085\%)^{2.028}}\Rightarrow TRR\cong 1.56\%.$$

d)

- OT

$$DFW_{OT}=\frac{0.244\times\frac{6\%}{[1+1.872\%]^{0.244}}+1.258\times\frac{6\%}{[1+2.379\%]^{1.258}}+2.272\times\frac{108\%}{[1+2.954\%]^{2.272}}}{112.89\%}\cong 2.11.$$

- OCA

$$B_0^{OCA}=\frac{100\%\times\left(1+\frac{4\%}{2}\right)^{2\times 2}}{[1+2.379\%]^{1.258}}\cong 105.09\%.$$

$$DFW_{OCA}=1.258.$$

- Carteira

$$B_0^C=EUR2M\times 112.89\%+EUR1M\times 105.09\%\cong EUR3{,}308{,}700$$

$$DFW_C=2.11\times\frac{EUR2M\times 112.89\%}{EUR3{,}308{,}700}+1.258\times\frac{EUR1M\times 105.09\%}{EUR3{,}308{,}700}\cong 1.84\ \text{anos}.$$

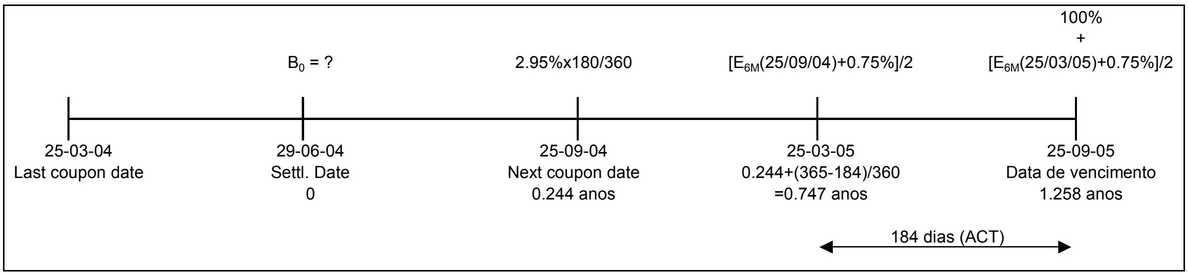
$$\lambda=\frac{0.25\%}{1+2.25\%}\cong 0.244\%.$$

Portanto,

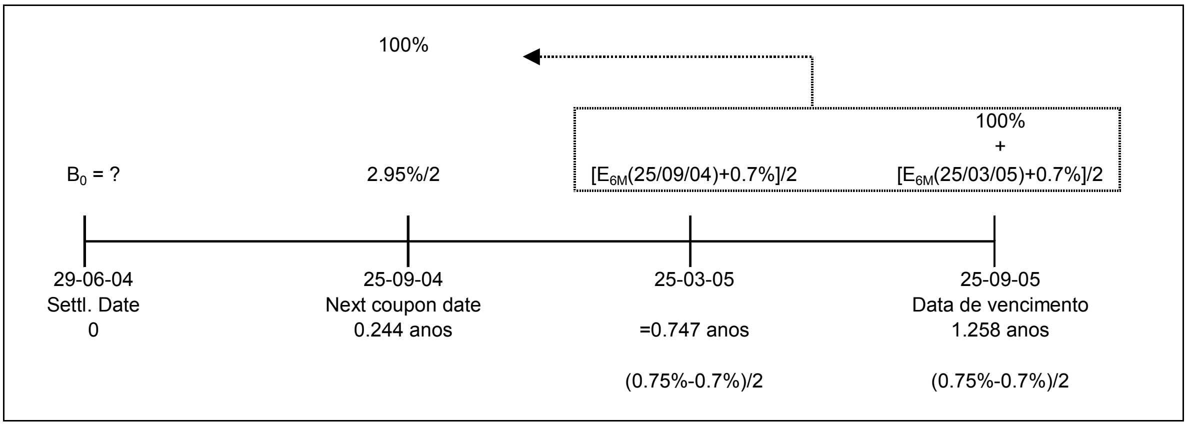
$$\Delta\%B_0^c\approx -1.84\times 0.244\%\cong 0.449\%.$$

e)

Pretende-se avaliar uma FRN com os seguintes *cash flows* futuros:




Tal é equivalente a considerar a seguinte decomposição de *cash flows* futuros:




Credit spread BBB – Mercado monetário = 0.80% - 0.10% = 0.70%.

$$r(0{,}0.747) \approx 2.25\% + (2.75\% - 2.25\%) \times \frac{0.747 - 1}{2 - 1} \cong 2.124\%.$$

Portanto,

$$B_0 = \frac{100\% + \dfrac{2.95\%}{2}}{(1 + 1.872\% + 0.80\%)^{0.244}} + \frac{\dfrac{0.75\% - 0.70\%}{2}}{(1 + 2.124\% + 0.80\%)^{0.747}} + \frac{\dfrac{0.75\% - 0.70\%}{2}}{(1 + 2.379\% + 0.80\%)^{1.258}}$$

$$= 100.75\%.$$

**CASO 3**

a)

$$E(r_p) = 7.6\% \times 0.6 + 14\% \times 0.25 + 10.8\% \times 0.15 \cong 9.68\%.$$

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= (0.6)^2 \times (0.2)^2 + (0.25)^2 \times (0.27)^2 + (0.15)^2 \times (0.23)^2 \\ &+ 2 \times 0.6 \times 0.25 \times 0.2 \times 0.27 \times 0.3 + 2 \times 0.6 \times 0.15 \times 0.2 \times 0.23 \times 0.5 \\ &+ 2 \times 0.25 \times 0.15 \times 0.27 \times 0.23 \times 0.8 \\ &\cong 0.032873\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma_p \cong 18.131\%.$$

$$r_f = ?$$

Visto que as taxas de rentabilidade esperadas foram obtidas via equação da SML e usando, por exemplo, as componentes EUR e USD:

$$\begin{cases} 7.6\% = r_f + [E(r_M) - r_f] \times 0.7 \\ 14\% = r_f + [E(r_M) - r_f] \times 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [E(r_M) - r_f] = \dfrac{7.6\% - r_f}{0.7} \\ 14\% = r_f + \dfrac{7.6\% - r_f}{0.7} \times 1.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ r_f \cong 2\% \end{cases}$$

$$IS_p = \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_p} = \frac{9.68\% - 2\%}{18.131\%} \cong 0.424.$$

b)

$$\underset{E(r_p)}{MIN}\, \sigma_p^2 = 18.1091 E(r_p)^2 - 3.3978 E(r_p) + 0.1921$$

- Condição de 1ª ordem

$$\frac{d\sigma_p^2}{dE(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 2 \times 18.1091 E(r_p) - 3.3978 = 0 \Leftrightarrow E(r_{mvp}) \cong 9.381\%.$$

c)

Visto que a carteira em análise para o Fundo EVN não integra o "activo sem risco", a actual composição só é eficiente se estiver localizada sobre a fronteira eficiente de Markowitz.

- 1ª condição:

$E(r_p) = 9.68\% > E(r_{mvp}) \cong 9.381\%$. Condição verificada.

- 2ª condição:

$$0.032873 = 18.1091 \times (9.68\%)^2 - 3.3978 \times 9.68\% + 0.1921$$

$$\Leftrightarrow 0.032873 = 0.03288$$

Proposição verdadeira (até à 4ª casa decimal).

Trata-se, portanto, de uma carteira eficiente.

d)

$$\underset{E(r_p),\sigma_p^2}{MAX} U_p = E(r_p) - 4\sigma_p^2$$

Sujeito a

$$\sigma_p^2 = 18.1091 E(r_p)^2 - 3.3978 E(r_p) + 0.1921$$

e

$$(E(r_p) > E(r_{mvp}))$$

Tal é equivalente a resolver o seguinte problema de optimização sem restrições:

$$\underset{E(r_p),\sigma_p^2,\lambda}{MAX} L = E(r_p) - 4\sigma_p^2 + \lambda\left[\sigma_p^2 - 18.1091 E(r_p)^2 + 3.3978 E(r_p) - 0.1921\right]$$

Condições de 1ª ordem:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_p^2} = 0 \Leftrightarrow -4 + \lambda[1] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

$$\frac{\partial L}{\partial E(r_p)} = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda\left[-2 \times 18.1091 E(r_p) + 3.3978\right] = 0 \underset{\lambda=4}{\Rightarrow} 1 - 4 \times 2 \times 18.1091 E(r_p) + 4 \times 3.3978 = 0$$

$$\Leftrightarrow E(r_p) \cong 10.072\% > 9.381\%.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \sigma_p^2 - 18.1091 E(r_p)^2 + 3.3978 E(r_p) - 0.1921 = 0$$

$$\underset{E(r_p)\cong 10.072\%}{\Rightarrow} \sigma_p^2 = 18.1091 \times (10.072\%)^2 - 3.3978 \times 10.072\% + 0.1921 \Leftrightarrow \sigma_p \cong 18.325\%.$$

e)

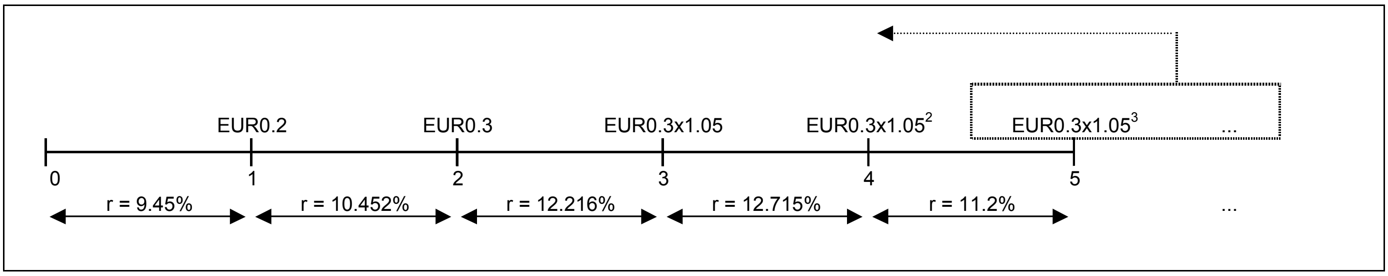
$\beta_p = 0.7\times 0.6 + 1.5\times 0.25 + 1.1\times 0.15 \cong 0.96.$

$(18.131\%)^2 = (0.96\times 18\%)^2 + \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \sigma_\varepsilon \cong 5.49\% \neq 0 \Rightarrow$ Carteira não completamente diversificada uma vez que possui risco especifico.

**<u>CASO 4</u>**

a)

Pretende-se avaliar uma acção com os seguintes dividendos esperados:




Cálculo das taxas de actualização:

- Ano 1

$r(0,1) = 2.25\% + 8\% \times 0.9 = 9.45\%.$

- Ano 2

$$r_f(1,2) = \frac{(1+2.75\%)^2}{1+2.25\%} - 1 \cong 3.252\%.$$

$r(1,2) = 3.252\% + 8\% \times 0.9 = 10.452\%.$

- Ano 3

$$r_f(2,3) = \frac{(1+3.5\%)^3}{(1+2.75\%)^2} - 1 \cong 5.016\%.$$

$r(2,3) = 5.016\% + 8\% \times 0.9 = 12.216\%.$

- Ano 4

$$r_f(3,4) = \frac{(1+4\%)^4}{(1+3.5\%)^3} - 1 \cong 5.515\%.$$

$r(3,4) = 5.515\% + 8\% \times 0.9 = 12.715\%.$

- Ano 5 e seguintes = 4% + 8% x 0.9 = 11.2%.

$$P_0 = \frac{0.2}{1+9.45\%} + \frac{0.3}{(1+9.45\%)(1+10.452\%)} + \frac{0.3 \times 1.05}{(1+9.45\%)(1+10.452\%)(1+12.216\%)}$$

$$+ \frac{0.3 \times (1.05)^2}{(1+9.45\%)(1+10.452\%)(1+12.216\%)(1+12.715\%)}$$

$$+ \frac{\frac{0.3 \times (1.05)^3}{11.2\% - 5\%}}{(1+9.45\%)(1+10.452\%)(1+12.216\%)(1+12.715\%)}$$

$\cong EUR 4.54.$

b)

Cotação *bid* = EUR4.57 > EUR4.54 $\Rightarrow$ Vender.

Cotação *ask* = EUR4.60 > EUR4.54 $\Rightarrow$ Não comprar.

c)

$$\beta_S = \frac{\sigma_S \sigma_M \rho_{S,M}}{\sigma_M^2} \Rightarrow 0.9 = \frac{\sigma_S \times 0.7}{0.18} \Leftrightarrow \sigma_S \cong 23.143\%.$$