OPÇÕES FINANCEIRAS - Exame
(resolução)

18/04/2005

1. (a) Integrando ambos os membros entre $[0, t]$:

$$X_t = \mu t + \int_0^t W_s^2 dW_s.$$

Aplicando valores esperados a ambos os membros,

$$\mathbb{E}\left(X_t | \mathcal{F}_0\right) = \mu t,$$

visto que $\int_0^t W_s^2 dW_s$ é um integral de Itô. Consequentemente,

$$Var\left(X_t | \mathcal{F}_0\right) = \mathbb{E}\left[\left.\left(\int_0^t W_s^2 dW_s\right)^2 \right| \mathcal{F}_0\right].$$

Aplicando a Itô isometry,

$$\begin{aligned} Var\left(X_t | \mathcal{F}_0\right) &= \int_0^t \mathbb{E}\left(W_s^4 \middle| \mathcal{F}_0\right) ds \\ &= \int_0^t 3s^2 ds \\ &= 3\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^t \\ &= t^3. \end{aligned}$$

(b) Aplicando a representação de Feynman-Kac:

$$V(x,t) = e^{-0(T-t)} \mathbb{E}_x\left[\left(X_T - K\right)^+ \middle| X_t = x\right],$$

e

$$dX_s = \sigma X_s dZ_s$$

onde Z representa um standard Brownian motion e $X_t = x$.
Aplicando o lema de Itô a $\ln(X_s)$,

$$X_T = X_t \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma (Z_T - Z_t)\right].$$

Visto que $(Z_T - Z_t) \sim N^1(0, T-t)$,

$$V(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{X_t \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 (T-t) + \sigma w\right] - K\right\}^+ \frac{\exp\left[-\frac{w^2}{2(T-t)}\right]}{\sqrt{2\pi (T-t)}} dw.$$

Comparando a expressão anterior com a equação 221 dos handouts, a única diferença reside na ausencia de factor de desconto. Consequentemente, a solução final é dada pela equação 217 dos handouts, mas sem considerar o factor de desconto:

$$V(x,t) = X_t \Phi\left(d_+^F\right) - K\Phi\left(d_-^F\right),$$

sendo

$$d_{\pm}^{F} := \frac{\ln\left(\frac{X_t}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Esta fórmula de avaliação é utilizda para avaliar calls europeias (e americanas) sobre futuros com futures-style marginning.

(c) Aplicando novamente a representação de Feynman-Kac e por forma a recuperar o factor de desconto:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} - rV(x,t) = 0,$$

sujeito a

$$V(x,T) = (K-x)^{+},$$

onde K representa o strike da opção.

A variável aleatória X é um martingale na medida de probabilidade considerada, uma vez que a sua SDE

$$dX_s = \sigma X_s dZ_s$$

não apresenta drift (martingale representation theorem).

2. (a) $S_{2,0} =?$

$d = \frac{3.70}{5.00} \cong 0.74$. Portanto,

$$S_{2,0} = 3.70 \times 0.74 \cong \mathbf{EUR2.74}.$$

$P_{3,0} =?$

Strike (K): $2.3 = K - 3.7 \Longleftrightarrow K = EUR6.0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} P_{3,0} &= (6.0 - 2.03)^{+} \\ &= \mathbf{3.97}. \end{aligned}$$

$P_{0,0} = \max\left\{6.0 - 5.0; \exp\left(-r \times \frac{3}{3}\right)\left[q \times 0.55 + (1-q) \times 2.30\right]\right\}$.

Convertendo a taxa de actualização para capitalização continua,

$$\begin{aligned} r &= \ln(1 + 4\%) \\ &\cong 3.922\%. \end{aligned}$$

Uma vez que não existem dividendos,

$$\begin{aligned} q &= \frac{\exp\left(3.922\% \times \frac{3}{3}\right) - 0.74}{(0.74)^{-1} - 0.74} \\ &\cong 0.4907. \end{aligned}$$

Em suma,

$$\begin{aligned} P_{0,0} &= \max\left\{1.0; \exp(-3.922\%)\left[0.4907 \times 0.55 + (1 - 0.4907) \times 2.30\right]\right\} \\ &= \max(1.0; 1.3858) \\ &\cong \mathbf{EUR1.39}. \end{aligned}$$

(b) Utilizando a equação (25) dos handouts,

i. $(0,0)$

Nº de acções a comprar/vender:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{0.55-2.30}{6.75-3.70} \\ &\cong -0.5738.\end{aligned}$$

É então necessário **vender** $0.5738 \times 10 \times 100 = 573.8$ **acções.**
Efectuar uma aplicação financeira no valor de $1,000 \times EUR1.39 + 573.8 \times EUR5.0 = \mathbf{EUR4,259}$. I.e.

$$\begin{aligned}B\psi &= 1,000 \times \exp(-3.922\%) \times \frac{2.30 \times 6.75 - 0.55 \times 3.70}{6.75-3.70} \\ &\cong EUR4,253.\end{aligned}$$

ii. $(1,1)$

Posição a assumir sobre as acções subjacentes:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{0-1.12}{9.11-5.00} \\ &\cong -0.2725.\end{aligned}$$

É então necessário **comprar** $(0.5738-0.2725) \times 10 \times 100 = 301.3$ **acções.**
Passamos assim a deter uma posição curta sobre um total de $0.2725 \times 10 \times 100 = 272.5$ acções.
Reduzir a aplicação financeira até ao valor de

$$\begin{aligned}B\psi &= EUR4,259 \times \exp(3.922\%) - 301.3 \times EUR6.75 \\ &\cong \mathbf{EUR2,395.58},\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}B\psi &= 1,000 \times \exp(-3.922\%) \times \frac{1.12 \times 9.11 - 0 \times 5.00}{9.11-5.00} \\ &\cong EUR2,387.05.\end{aligned}$$

iii. $(2,1)$

Posição a assumir sobre as acções subjacentes:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{0.00-2.30}{6.75-3.70} \\ &\cong -0.7541.\end{aligned}$$

É então necessário **vender** $(0.7541-0.2725) \times 10 \times 100 = 481.6$ **acções.**
Passamos assim a deter uma posição curta sobre um total de $0.7541 \times 10 \times 100 = 754.1$ acções.
Reforçar a aplicação financeira até ao valor de

$$\begin{aligned}B\psi &= EUR2,395.58 \times \exp(3.922\%) + 481.6 \times EUR5.0 \\ &\cong \mathbf{EUR4,899.40}.\end{aligned}$$

iv. $(3,1)$

Uma vez que a put termina ITM ($S_{3,1} = 3.70 < K$), é necessário assumir uma posição curta sobre $1,000$ acções. Para o efeito, necessitamos ainda de **vender** $1,000 \times (1 - 0.7541) = 245.90$ **acções**. Tal posição curta é anulada via recebimento das $1,000$ acções entregues pelo comprador da put.

O valor terminal da aplicação financeira é igual a

$$\begin{aligned} B\psi &= EUR4,899.40 \times \exp(3.922\%) + 245.90 \times 3.70 \\ &\cong EUR6,005.20. \end{aligned}$$

Tal valor corresponde ao montante necessário e suficiente (arredondamentos à parte...) para pagar ao vendedor da put $1,000 \times EUR6 = EUR6,000$.

3. (a) Modelo de Garman-Kohlhagen:

$$c_t(S,K,T) = S_t e^{-r_f\tau}\Phi(d_+) - e^{-r_d\tau}K\Phi(d_-).$$

i. Taxa de juro do EUR em regime de capitalização contínua:

$$\begin{aligned} r_f &= \frac{365}{91} \times \ln\left(1 + 2.1\% \times \frac{91}{365}\right) \\ &\cong 2.095\%. \end{aligned}$$

Taxa de juro do USD em regime de capitalização contínua:

$$\begin{aligned} r_d &= \frac{365}{91} \times \ln\left(1 + 3.2\% \times \frac{91}{365}\right) \\ &\cong 3.187\%. \end{aligned}$$

Strike igual à taxa de câmbio forward EUR/USD a 91 dias, visto tratar-se de um contrato ATM-forward:

$$\begin{aligned} K &= S_t e^{(r_d - r_f)\tau} \\ &= US\$1.2 \times \exp\left[(3.187\% - 2.095\%) \times \frac{91}{365}\right] \\ &\cong US\$1.2033. \end{aligned}$$

Volatilidade (anualizada) da taxa de câmbio:

$$\begin{aligned} \sigma &= 1.664\% \times \sqrt{52} \\ &\cong 12\%. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} c_0 = {} & US\$1.20 \times \exp\left(-2.095\% \times \frac{91}{365}\right) \times \Phi(d_+) \\ & - \exp\left(-3.187\% \times \frac{91}{365}\right) \times US\$1.2033 \times \Phi(d_-), \end{aligned}$$

sendo:

$$
\begin{aligned}
d_+ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{1.20}{1.2033}\right) + \left(3.187\% - 2.095\% + \frac{0.12^2}{2}\right) \times \frac{91}{365}}{0.12 \times \sqrt{\frac{91}{365}}} \\
&\cong 0.03
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{\tau} \\
&= 0.03 - 0.12 \times \sqrt{\frac{91}{365}} \\
&\cong -0.03.
\end{aligned}
$$

Utilizando uma tabela da normal reduzida,

$$
\begin{aligned}
\Phi(d_+) &= \Phi(0.03) \\
&= 0.5120
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\Phi(d_-) &= \Phi(-0.03) \\
&= 1 - \Phi(0.03) \\
&= 1 - 0.5120 \\
&= 0.4880.
\end{aligned}
$$

Em suma,

$$
\begin{aligned}
c_0 &= US\$1.20 \times \exp\left(-2.095\% \times \frac{91}{365}\right) \times 0.5120 \\
&\quad - \exp\left(-3.187\% \times \frac{91}{365}\right) \times US\$1.2033 \times 0.4880 \\
&\cong US\$0.0285.
\end{aligned}
$$

(b) Visto que a opção está ATM-forward, o valor da put europeia é também igual a $US\$0.0285$.

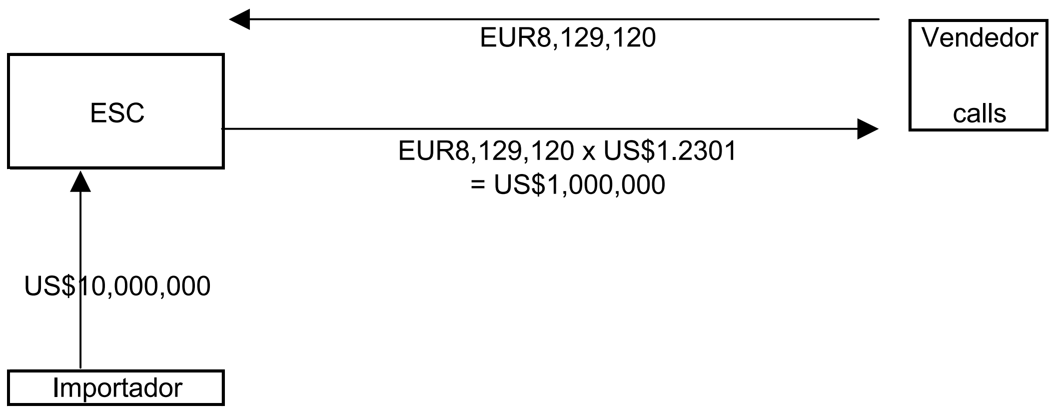
(c) O objectivo consiste em vender $US\$10M$ daqui a 91 dias. Ora, vender USD é equivalente a comprar EUR.

O risco a cobrir consiste na possibilidade de subida da taxa de câmbio EUR/USD, ou seja na hipótese de apreciação do EUR. Para cobrir tal risco, uma estratégia admissivel consiste em comprar calls EUR/USD com vencimento a 91 dias.

Desprezando desfazamentos temporais, o exercício das calls permite fixar um preço de compra (máximo) igual a $(X_c + c)$ por cada EUR, com um custo de cobertura igual a c por cada EUR. Ou seja, permite receber $\frac{US\$10M}{X_c+c}$ euros via entrega de $US\$10M$; e implica um custo de cobertura igual a $\frac{\frac{US\$10M}{X_c+c}\times c}{US\$1.20}$ euros:

X	c	X+c	Contract size	Custo em EUR
1.10	0.1045	1.2045	€ 8,302,401	€ 722,799
1.20	0.0301	1.2301	€ 8,129,120	€ 204,213
1.30	0.0035	1.3035	€ 7,671,928	€ 22,078

Em sintese, é necessário comprar calls EUR/USD, com vencimento a 91 dias, com strike igual a $US\$1.20$ e com contract size igual a $EUR8,129,120$. Tal permite fixar um contra-valor minimo igual a $EUR8,129,120$ ($>EUR8M$), com um custo de cobertura igual a $EUR204,213$ ($<EUR500,000$):



(d) Via paridade put-call,

$$c_t(S,K,T) - p_t(S,K,T) = S_t e^{-r_f\tau} - e^{-r_d\tau}K,$$

é possível obter o valor de equilibrio da put em análise:

$$0.0035 - p_0 = US\$1.20 \times \exp\left(-2.095\% \times \frac{91}{365}\right) - \exp\left(-3.187\% \times \frac{91}{365}\right) \times US\$1.30,$$

i.e.

$$p_0 = US\$0.0995.$$

Uma vez que a put está cara em mercado ($US\$0.12 > US\$0.0995$), dever-se-à vender a put e criar uma posição artificial long put (ou seja, long call + short spot + aplicação financeira). Para um contract size igual a $EUR1$:

	0	91 dias	
		$S_T > 1.30$	$S_T < 1.30$
Short put	0.1200	0	S_T - 1.3
Long call	-0.0035	S_T - 1.3	0
Short spot[a]	1.1937	-€1xS_T	-€1xS_T
Apl. Fin. em USD	-1.2897	1.3	1.3
total	**0.0205**	0	0

Cash flows em USD

[a]Financiamento no valor de EUR1/(1+2.1%x91/365)

Para um contract size de $EUR2M$, o ganho de artigragem será igual a

$$EUR2M \times US\$0.0205 = US\$41,000.$$

(e) Para especular sobre expectativa de reduzida volatilidade com limitação de perdas, existem 2 possibilidades: long butterfly spread ou long condor. A 2ª alternativa pode ser afastada uma vez que apenas dispomos de 3 strikes.

Relativamente ao long butterfly spread, o mesmo pode ser implementado via calls ou via puts. Em qualquer dos casos, as perdas são limitadas à soma algebrica dos prémios pagos/recebidos:

LONG BUTTERFLY SPREAD

Strike	Call	Put
Long 1.1	-0.1045	-0.0020
2 Short 1.2	0.0603	0.0538
Long 1.3	-0.0035	-0.1200
Perda máxima:	-0.0476	-0.0682

Portanto, a estratégia a adoptar consiste num long butterfly call spread.

O lucro máximo é obtido para um spot igual ao strike intermédio:

	S_T = 1.20
Long 1.1	1.2 - 1.1
2 Short 1.2	0.0000
Long 1.3	0.0000
Prémios	-0.0476
Lucro	**0.0524**