OPÇÕES FINANCEIRAS - Exame (resolução)

12/04/2006

1. (a) Aplicando o lema de Itô ao processo

$$y(t) := \exp(-bt) X(t), \tag{1}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} dy(t) &= -be^{-bt} X(t)\,dt + e^{-bt}\{[a + bX(t)]\,dt + W(t)\,dW(t)\} \\ &= ae^{-bt} dt + e^{-bt} W(t)\,dW(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Integrando ambos os membros da SDE (2) entre t_0 e t ($\geq t_0$),

$$\begin{aligned} y(t) &= y(t_0) + a\int_{t_0}^{t} e^{-bs} ds + \int_{t_0}^{t} e^{-bs} W(s)\,dW(s) \\ &= y(t_0) + a\left[-\frac{e^{-bs}}{b}\right]_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} e^{-bs} W(s)\,dW(s) \\ &= y(t_0) - \frac{a}{b}\left(e^{-bt} - e^{-bt_0}\right) + \int_{t_0}^{t} e^{-bs} W(s)\,dW(s). \end{aligned} \tag{3}$$

Combinando as equações (1) e (3),

$$e^{-bt} X(t) = e^{-bt_0} X(t_0) - \frac{a}{b}\left(e^{-bt} - e^{-bt_0}\right) + \int_{t_0}^{t} e^{-bs} W(s)\,dW(s),$$

i.e.

$$X(t) = e^{b(t-t_0)} X(t_0) - \frac{a}{b}\left[1 - e^{b(t-t_0)}\right] + \int_{t_0}^{t} e^{-bs} W(s)\,dW(s). \tag{4}$$

Aplicando valores esperados a ambos os membros,

$$\mathbb{E}\left[X(t)|\,\mathcal{F}_{t_0}\right] = e^{b(t-t_0)} X(t_0) - \frac{a}{b}\left[1 - e^{b(t-t_0)}\right],$$

visto que $\int_{t_0}^{t} e^{-bs} W(s)\,dW(s)$ é um integral de Itô. Consequentemente,

$$Var\left[X(t)|\,\mathcal{F}_{t_0}\right] = \mathbb{E}\left[\left.\left(\int_{t_0}^{t} e^{-bs} W(s)\,dW(s)\right)^2\right|\mathcal{F}_{t_0}\right].$$

Aplicando a Itô isometry,

$$\begin{aligned} Var\left[X(t)|\,\mathcal{F}_{t_0}\right] &= \int_{t_0}^{t} e^{-2bs}\mathbb{E}\left[W^2(s)\big|\,\mathcal{F}_{t_0}\right] ds \\ &= \int_{t_0}^{t} e^{-2bs}(s - t_0)\,ds. \end{aligned}$$

(b) Aplicando a representação de Feynman-Kac:

$$V(x,t) = e^{-0(T-t)}\mathbb{E}_x\left[X_T|\,X_t = x\right],$$

e

$$dX_s = (r-q)\, X_s ds + \sigma X_s dZ_s$$

onde Z representa um standard Brownian motion e $X_t = x$.
Aplicando o lema de Itô a $\ln(X_s)$,

$$X_T = X_t \exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma \int_t^T dZ_s\right].$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \mathbb{E}_x\left\{ X_t \exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\int_t^T dZ_s\right] \middle| X_t = x\right\} \\ &= x\exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] \mathbb{E}_x\left\{\exp\left[\sigma\int_t^T dZ_s\right]\middle| \mathcal{F}_t\right\}. \end{aligned}$$

Visto que $\int_t^T dZ_s \sim N^1(0, T-t)$,

$$\begin{aligned} V(x,t) &= x\exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]\exp\left[\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right] \\ &= x\exp\left[(r-q)(T-t)\right]. \end{aligned}$$

$V(x,t)$ pode ser interpretado como sendo o preço forward do activo X_t para a data T.

(c) A solução da SDE é dada por:

$$S_T = S_t \exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\int_t^T d\tilde{W}_s\right].$$

Dado tratar-se de uma opção de estilo europeu, a mesma é um martingale na medida Q e portanto:

$$\begin{aligned} V(S,t) &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_Q\left[(S_T - X)\,\mathbb{I}_{\{S_T>K\}}\middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{S_t\exp\left[\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma w\right] - X\right\}\mathbb{I}_{\{w>w^*\}}\frac{\exp\left(-\frac{w^2}{2\tau}\right)}{\sqrt{2\pi\tau}}dw, \end{aligned}$$

onde

$$w^* := \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma}. \tag{5}$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
& V\left(S,t\right) \\
= \; & S_t e^{-q\tau}\int_{w^*}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\tau+\sigma w-\frac{w^2}{2\tau}\right)}{\sqrt{2\pi\tau}}dw - e^{-r\tau}X\int_{w^*}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{w^2}{2\tau}\right)}{\sqrt{2\pi\tau}}dw \\
= \; & S_t e^{-q\tau}\int_{w^*}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{w^2-2\tau\sigma w+\sigma^2\tau^2}{\tau}\right)}{\sqrt{2\pi\tau}}dw - e^{-r\tau}X\left[1-\int_{-\infty}^{w^*}\frac{\exp\left(-\frac{w^2}{2\tau}\right)}{\sqrt{2\pi\tau}}dw\right] \\
= \; & S_t e^{-q\tau}\left\{1-\int_{-\infty}^{w^*}\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(w-\sigma\tau)^2}{\tau}\right]}{\sqrt{2\pi\tau}}\right\}dw - e^{-r\tau}X\left[1-\Phi\left(\frac{w^*-0}{\sqrt{\tau}}\right)\right] \\
= \; & S_t e^{-q\tau}\left[1-\Phi\left(\frac{w^*-\sigma\tau}{\sqrt{\tau}}\right)\right]-e^{-r\tau}X\Phi\left(-\frac{w^*}{\sqrt{\tau}}\right). \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Combinando as equações (5) e (6),

$$
\begin{aligned}
V\left(S,t\right) \;=\; & S_t e^{-q\tau}\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-q+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right] \\
& -e^{-r\tau}X\Phi\left[\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right].
\end{aligned}
$$

(a) $S_{2,2}=?$
$u=\frac{113.31}{100.00}\cong 1.1331$. Portanto,

$$S_{2,2}=113.31\times 1.1331\cong \mathbf{EUR128.40}.$$

$P_{4,0}=?$

$$
\begin{aligned}
P_{4,0} &= (100-60.65)^{+} \\
&= \mathbf{39.35}.
\end{aligned}
$$

$P_{0,0}=\max\left\{100-100;\exp\left(-r\times\frac{1}{4}\right)\left[q\times 2.91+(1-q)\times 13.90\right]\right\}$.
Convertendo a taxa de actualização para capitalização continua,

$$
\begin{aligned}
r &= \ln\left(1+3.0455\%\right) \\
&\cong 3\%.
\end{aligned}
$$

Uma vez que não existem dividendos,

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{\exp\left(3\times\frac{1}{4}\right)-(1.1331)^{-1}}{1.1331-(1.1331)^{-1}} \\
&\cong 0.4988.
\end{aligned}
$$

Em suma,

$$\begin{aligned}
P_{0,0} &= \max\left\{0; \exp\left(-3\% \times \frac{1}{4}\right)[0.4988 \times 2.91 + (1-0.4988) \times 13.90]\right\} \\
&= \max(0; 8.35) \\
&\cong \mathbf{EUR8.35}.
\end{aligned}$$

(b) Utilizando a equação (25) dos handouts,

i. $(0,0)$
Nº de acções a comprar/vender:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{2.91 - 13.90}{113.31 - 88.25} \\
&\cong -0.4384.
\end{aligned}$$

É então necessário **vender** $0.4384 \times 10 \times 100 = 438.4$ **acções**.
Efectuar uma aplicação financeira no valor de $B\psi = 1,000 \times EUR8.35 + 438.4 \times EUR100 = \mathbf{EUR52,195.9}$.

ii. $(1,0)$
Posição a assumir sobre as acções subjacentes:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{5.84 - 22.12}{100 - 77.88} \\
&\cong -0.7358.
\end{aligned}$$

É então necessário **vender** $(0.7358 - 0.4384) \times 10 \times 100 = 297.32$ **acções**.
Passamos assim a deter uma posição curta sobre um total de $0.7358 \times 10 \times 100 = 735.8$ acções.
Reforçar a aplicação financeira até ao valor de

$$\begin{aligned}
B\psi &= EUR52,195.9 \times \exp\left(\frac{3\%}{4}\right) + 297.32 \times EUR88.25 \\
&\cong \mathbf{EUR78,827.57}.
\end{aligned}$$

iii. $(2,1)$
Posição a assumir sobre as acções subjacentes:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{0.00 - 11.75}{113.31 - 88.25} \\
&\cong -0.4688.
\end{aligned}$$

É então necessário **comprar** $(0.7358 - 0.4688) \times 10 \times 100 = 266.97$ **acções**.
Passamos assim a deter uma posição curta sobre um total de $0.4688 \times 10 \times 100 = 468.8$ acções.
Reduzir a aplicação financeira até ao valor de

$$\begin{aligned}
B\psi &= EUR78,827.57 \times \exp\left(\frac{3\%}{4}\right) - 266.97 \times EUR100 \\
&\cong \mathbf{EUR52,724.02}.
\end{aligned}$$

iv. $(3, 1)$
Posição a assumir sobre as acções subjacentes:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{0.00 - 22.12}{100 - 77.88} \\ &\cong -1.\end{aligned}$$

É então necessário **vender** $(1 - 0.4688) \times 10 \times 100 = 531.21$ **acções**. Passamos assim a deter uma posição curta sobre um total de $1 \times 10 \times 100 = 1,000$ acções. Reforçar a aplicação financeira até ao valor de

$$\begin{aligned}B\psi &= EUR52,724.02 \times \exp\left(\frac{3\%}{4}\right) + 531.21 \times EUR88.25 \\ &\cong \mathbf{EUR100,000}.\end{aligned}$$

Caso a opção seja (racionalmente) exercida antecipadamente, estamos em condições de pagar o strike. Caso contrário:

v. $(4, 1)$
Uma vez que a put termina ITM ($S_{4,1} = 77.88 < K$), é necessário assumir uma posição curta sobre $1,000$ acções, a qual já existe. Tal posição curta é anulada via recebimento das $1,000$ acções entregues pelo comprador da put. O valor terminal da aplicação financeira é igual a

$$\begin{aligned}B\psi &= EUR100,000 \times \exp\left(\frac{3\%}{4}\right) \\ &\cong \mathbf{EUR100,752.82}.\end{aligned}$$

Tal valor é mais do que suficiente para pagar ao vendedor da put $1,000 \times EUR100 = EUR100,000$.

(a) Modelo de Merton:

$$c_t(S, K, T) = S_t e^{-q\tau} \Phi(d_+) - e^{-r\tau} K \Phi(d_-).$$

Taxa de juro sem risco em regime de capitalização contínua:

$$\begin{aligned}r &= \frac{360}{182} \times \ln\left(1 + 2.756\% \times \frac{182}{360}\right) \\ &\cong 2.7\%.\end{aligned}$$

i. Volatilidade (anualizada) da acção ACN:

$$\begin{aligned}\sigma &= 5.774\% \times \sqrt{12} \\ &\cong 20\%.\end{aligned}$$

Portanto,

$$c_0 = 10 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) \times \Phi(d_+) - 9.75 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) \times \Phi(d_-),$$

sendo:

$$\begin{aligned} d_+ &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{10}{9.75}\right) + \left(2.7\% - 2.7\% + \frac{0.2^2}{2}\right) \times \frac{182}{360}}{0.2 \times \sqrt{\frac{182}{360}}} \\ &\cong 0.2491 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_- &= d_+ - \sigma\sqrt{\tau} \\ &= 0.2491 - 0.2 \times \sqrt{\frac{182}{360}} \\ &\cong 0.1069. \end{aligned}$$

Utilizando uma tabela da normal reduzida,

$$\begin{aligned} \Phi\left(d_+\right) &\approx \Phi\left(0.25\right) \\ &= 0.5987 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi\left(d_-\right) &\approx \Phi\left(0.11\right) \\ &= 0.5438. \end{aligned}$$

Em suma,

$$\begin{aligned} c_0 &= 10 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) \times 0.5987 - 9.75 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) \times 0.5438 \\ &\cong e0.6758. \end{aligned}$$

(b) O objectivo é calcular o valor de σ:

$$\begin{aligned} 0.615 &= -10 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) \times \Phi\left[-\frac{\ln\left(\frac{10}{10}\right) + \left(2.7\% - 2.7\% + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times \frac{182}{360}}{\sigma\sqrt{\frac{182}{360}}}\right] \\ &\quad +10 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) \times \Phi\left(-\frac{-\frac{\sigma^2}{2} \times \frac{182}{360}}{\sigma\sqrt{\frac{182}{360}}}\right), \end{aligned}$$

i.e.

$$\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{182}{360}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{182}{360}}\right) = \frac{0.615}{10 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right)}.$$

Xp	p (ask)	Xp-p
€ 9.50	€ 0.334	€ 9.17
€ 10.50	€ 0.853	€ 9.65
€ 11.00	NA	NA

Figura 1:

Xp	Xc	p (ask)	c (bid)	-p+c	Xp-p+c
€ 9.50	€ 10.50	€ 0.334	€ 0.358	€ 0.024	€ 9.52
€ 9.50	€ 11.00	€ 0.334	€ 0.220	-€ 0.114	€ 9.39
€ 10.50	**€ 11.00**	€ 0.853	€ 0.220	-€ 0.633	€ 9.87

Figura 2:

Visto a distribuição normal ser simétrica,

$$2\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{182}{360}}\right)-1=\frac{0.615}{10\times\exp\left(-2.7\%\times\frac{182}{360}\right)},$$

i.e.

$$\Phi\left(\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{182}{360}}\right)\cong 0.5312.$$

Utilizando a tabela da normal reduzida,

$$\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{182}{360}}\approx 0.08 \iff \sigma\cong 22.5\%.$$

(c) Para pré-fixar um preço de venda mínimo, a estratégia natural (mais simples) consiste em comprar 100 (10,000/100) puts sobre acções ACN e com vencimento a 182 dias.

Desprezando desfazamentos temporais, o exercício das puts permite fixar um preço de venda (minimo) igual a $(X_p - p)$ por acção, com um custo de cobertura igual a p por acção:

O strike de €10.50 permite fixar um preço de venda minimo por acção superior a €9.60. Todavia, o custo de cobertura por acção é superior a €0.70 (€7,000/10,000).

Para reduzir o custo da cobertura, é necessário vender 100 calls com strike superior ao preço de exercicio das puts. Ou seja, é necessário construir um long range forward:

Portanto, a compra de 100 puts com strike €10.50 e a venda de 100 calls com strike €11.00 permite fixar um preço de venda minimo igual a €9.87 (>€9.60) com um custo de cobertura de apenas €0.633 (<€0.70) por acção.

(d) Via paridade put-call,

$$c_t(S,K,T)-p_t(S,K,T)=S_te^{-q\tau}-e^{-r\tau}K,$$

	0	182 dias	
		$S_T > 11$	$S_T < 11$
Long put	-1.1060	0	11 - S_T
Short call	0.2200	11 - S_T	0
Long spot	-9.8663	S_T	S_T
Financiamento	10.8529	-11	-11
total	**0.1006**	0	0

Cash flows por acção

Figura 3:

Xp	Xc	p (ask)	c (ask)	-p-c
€ 9.50	€ 10.50	€ 0.33	€ 0.360	-€ 0.69
€ 9.50	**€ 11.00**	€ 0.33	€ 0.221	-€ 0.55
€ 10.50	€ 11.00	€ 0.85	€ 0.221	-€ 1.07

Figura 4:

i.e.

$$p_t(S, K, T) = c_t(S, K, T) - S_t e^{-q\tau} + e^{-r\tau} K,$$

tentemos identificar uma oportunidade de arbitragem. Visto o Banco MPN estar a cotar um preço ask (ao qual o Banco está disposto a vender a put), a oportunidade de arbitragem, a existir, só poderá ser aproveitada via compra da put (à cotação ask). Para construir sinteticamente uma posição short put será necessário:

i. vender a call (ao preço bid);
ii. comprar $100 \times e^{-q\tau}$ acções subjacentes (ao preço ask) e reinvestir os dividendos a receber na própria acção; e
iii. contrair um financiamento no valor de $100 \times e^{-r\tau} K$.

O valor de equilibrio da put em análise é igual a:

$$p_0 = e0.22 - e10 \times \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) + \exp\left(-2.7\% \times \frac{182}{360}\right) \times e11,$$

i.e.

$$p_0 \cong e1.206.$$

Uma vez que a put está barata em mercado ($e1.206 > e1.106$), dever-se-à comprar a put e criar uma posição artificial short put (ou seja, short call + long spot + financiamento). Para um contract size igual a 100 acções, tal estratégia deverá produzir um ganho de arbitragem igual a €10 = 100 x (€1.206-€1.106), i.e.:

(e) A estratégia long strangle consiste na assumpção das seguintes posições: long Xp put e long Xc call, com Xp<Xc. Consequentemente, as alternativas disponiveis limitam-se a:

A estratégia a escolher consiste em seleccionar Xp=€9.50 e Xc=€11.00, pois a mesma possui um custo de implementação (por acção) igual a €0.55 (<€0.60).

Os pontos de breakeven são dados por:

i. Xp-p-c = €9.50-€0.55 = €8.95; e

ii. Xc+p+c = €11.00+€0.55 = €11.55.